Corso di Laurea in Informatica Applicata

Linguaggio e Metodi della Matematica

Preparazione alla prova scritta del 20 Dicembre 2005

[Esercizio 1]
Si consideri la teoria $\Gamma = \{\forall x.P(x)\ ,\ \neg\exists y.Q(y)\}$.
Si dica se le seguenti formule sono conseguenza logica di Γ:

1. $\neg\exists z.(P(z) \rightarrow Q(z))$
2. $\forall z.(P(z) \rightarrow Q(z))$

In caso positivo fornire una dimostrazione formale, in caso negativo dare un'opportuna interpretazione come controesempio.

Svolgimento

La formula $\neg\exists z.(P(z) \rightarrow Q(z))$ è conseguenza logica di Γ, come dimostrato dalla seguente prova formale:

1.	$[\ \exists z.(P(z) \rightarrow Q(z))\ ]$	(Ipotesi aggiuntiva)
2.	$P(z_0) \rightarrow Q(z_0)$	($\exists$**I** da 1)
3.	$\forall x.P(x)$	(Ipotesi in Γ)
4.	$P(z_0)$	($\forall$**I** da 3)
5.	$Q(z_0)$	(**M**.**P**. da 2 e 4)
6.	$\exists y.Q(y)$	($\exists$**G** da 5)
7.	$\neg\exists y.Q(y)$	(Ipotesi in Γ)
8.	$\perp$	(**C**. da 6 e 7)
9.	$\neg\exists z.(P(z) \rightarrow Q(z))$	(**Abs** da $\frac{[1]}{8}$)

La formula $\forall z.(P(z) \rightarrow Q(z))$ invece non è conseguenza logica di Γ, come dimostrato dalla seguente interpretazione $\mathcal{I}$ che soddisfa tutte le formule in Γ ma rende falsa $\forall z.(P(z) \rightarrow Q(z))$.
Prendiamo $D_{\mathcal{I}} = \{a\}$, con $TS_{\mathcal{I}}(P) = \{a\}$ e $TS_{\mathcal{I}}(Q) = \emptyset$. Banalmente, si ha:

- $\mathcal{I} \models \forall x.P(x)$ perché $\mathcal{I} \models P(a)$ e a è il solo elemento di $D_{\mathcal{I}}$;
- $\mathcal{I} \models \neg\exists y.Q(y) \equiv \forall y.\neg Q(y)$ perché $\mathcal{I} \not\models Q(a)$ e a è il solo elemento di $D_{\mathcal{I}}$;
- $\mathcal{I} \not\models \forall z.(P(z) \rightarrow Q(z))$ perché prendendo $z = a$ si ha $\mathcal{I} \models P(a)$ e $\mathcal{I} \not\models Q(a)$ da cui $\mathcal{I} \not\models P(a) \rightarrow Q(a)$.

[Esercizio 2]
Si dica se le seguenti proprietà su insiemi sono valide:

1. $\forall A, B, C.\ (A - (B \cup C)\ \subseteq\ A - (B \cap C))$
2. $\forall A, B, C.\ (A - (B \cap C)\ \subseteq\ A - (B \cup C))$

In caso positivo fornire una dimostrazione formale, in caso negativo dare un controesempio.

Svolgimento

La proprietà $\forall A, B, C.\ (A - (B \cup C)\ \subseteq\ A - (B \cap C))$ è valida, come dimostrato dalla seguente prova formale:

1.	$x \in A - (B \cup C)$	(Ipotesi aggiuntiva)
2.	$\quad x \in A \cap \overline{(B \cup C)}$	(**EQ**. da 1)
3.	$\quad x \in A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	(**EQ**. da 2)
4.	$\quad x \in A$	(**A**.**E**.$_\cap$ da 3)
5.	$\quad x \in \overline{B}$	(**A**.**E**.$_\cap$ da 3)
6.	$\quad x \in \overline{B} \cup \overline{C}$	(**O**.**I**.$_\cup$ da 5)
7.	$\quad x \in \overline{(B \cap C)}$	(**EQ**. da 6)
8.	$\quad x \in A \cap \overline{(B \cap C)}$	(**A**.**I**.$_\cap$ da 4 e 7)
9.	$\quad x \in A - (B \cap C)$	(**EQ**. da 8)
10.	$x \in A - (B \cup C) \rightarrow x \in A - (B \cap C)$	(**Imp**. da $\frac{[1]}{9}$)
11.	$A - (B \cup C)\ \subseteq\ A - (B \cap C)$	($\forall$**G**$_\subseteq$ da 10)
12.	$\forall A, B, C.\ A - (B \cup C)\ \subseteq\ A - (B \cap C)$	($\forall$**G** per tre volte da 11)

La proprietà $\forall A, B, C.\ (A - (B \cap C)\ \subseteq\ A - (B \cup C))$ non è valida, come dimostrato dal seguente semplice controesempio.
Prendiamo $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b\}$ e $C = \{c\}$. Ovviamente $B \cap C = \emptyset$ e $B \cup C = \{b, c\}$, quindi:

- $A - (B \cap C) = A - \emptyset = A = \{a, b, c\}$;
- $A - (B \cup C) = A - \{b, c\} = \{a\}$;
- $\{a, b, c\} \not\subseteq \{a\}$.

[Esercizio 3]
Dimostrare per induzione che: $\forall n \geq 2.\ 5^n > 4 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2})$.
Giustificare con commenti precisi tutti i passaggi della dimostrazione.

Svolgimento

Procediamo per induzione.

[CASO BASE] Dobbiamo far vedere che la proprietà vale per $n = 2$. Infatti:

- $5^2 = 25$;
- $4 \cdot (5^1 + 5^0) = 4 \cdot (5 + 1) = 4 \cdot 6 = 24$;
- $25 > 24$.

[CASO INDUTTIVO] Prendiamo un n generico (maggiore o uguale a 2) e assumendo che $5^n > 4 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2})$ vogliamo far vedere che $5^{n+1} > 4 \cdot (5^n + 5^{n-1})$.

$5^{n+1} = 5 \cdot 5^n$	(per note proprietà degli esponenti)
$5 \cdot 5^n > 5 \cdot (4 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2}))$	(per l'ipotesi induttiva)
$5 \cdot (4 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2})) = 4 \cdot 5 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2})$	(per note proprietà del prodotto)
$4 \cdot 5 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2}) = 4 \cdot (5 \cdot 5^{n-1} + 5 \cdot 5^{n-2})$	(per note proprietà del prodotto)
$4 \cdot (5 \cdot 5^{n-1} + 5 \cdot 5^{n-2}) = 4 \cdot (5^n + 5^{n-1})$	(per note proprietà degli esponenti)

Riassumendo la catena di uguaglianze e disuguaglianze riportata sopra abbiamo:

$$5^{n+1} = 5 \cdot 5^n > 5 \cdot (4 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2})) = 4 \cdot (5^n + 5^{n-1})$$

e quindi $5^{n+1} > 4 \cdot (5^n + 5^{n-1})$.

[Esercizio 4]
Si considerino le seguenti relazioni su insiemi:

1. $R_1 = \{(A, B) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$
2. $R_2 = \{(A, B) \mid A - B = \emptyset\}$
3. $R_3 = \{(A, B) \mid \emptyset \subset A \subseteq B\}$

Si risponda alle seguenti domande, giustificando la risposta:

1. R_1 è riflessiva? Irriflessiva? Simmetrica? Transitiva?
2. R_2 è riflessiva? Irriflessiva? Simmetrica? Transitiva?
3. R_3 è riflessiva? Irriflessiva? Simmetrica? Transitiva?
4. Sapreste esprimere R_3 in termini di R_1 e R_2 usando le operazioni insiemistiche su relazioni?

Svolgimento

La relazione R_1 è simmetrica perché l'intersezione è simmetrica. Si noti che non è riflessiva perché $(\emptyset, \emptyset) \notin R_1$. In particolare per ogni coppia di insiemi $(A, B) \in R_1$ si ha certamente $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Non è irriflessiva perché per ogni insieme non vuoto A si ha $A \cap A = A \neq \emptyset$. Non è transitiva perché ad esempio $\{1\} \cap \{1, 2\} \neq \emptyset$ e $\{1, 2\} \cap \{2\} \neq \emptyset$ ma $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$.

Per studiare meglio la relazione R_2 si osservi che $A - B = \emptyset$ equivale a richiedere che tutti gli elementi di A siano anche in B, o in altre parole che $A \subseteq B$. Con questa definizione è facile vedere che R_2 è solo riflessiva e transitiva.

La relazione R_3 è solo transitiva. Infatti è del tutto simile a R_2, ma esclude che A e B possano essere insiemi vuoti: in particolare, $(\emptyset, \emptyset) \notin R_3$ e quindi non è riflessiva.

La tabella sottostante riassume le proprietà di R_1, R_2 e R_3.

	rif.	irr.	sim.	trans.
R_1	no $A = \emptyset$	no $A = \{1\}$	**si**	no $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{2\}$
R_2	**si**	no $A = \{1\}$	no $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$	**si**
R_3	no $A = \emptyset$	no $A = \{1\}$	no $A = \{1\}, B = \{1, 2\}$	**si**

Per quanto detto sopra a proposito di R_2 e R_1 è facile verificare che $R_3 = R_1 \cap R_2$.