

Linguaggio e Metodi della Matematica

Prova scritta del 20 Dicembre 2005

[Esercizio 1]

Data la teoria $\Gamma = \{\forall x.(P(x) \vee Q(x)), P(a) \rightarrow R(a), \neg R(a) \rightarrow \neg Q(a)\}$.

Si dica se le seguenti formule sono conseguenza logica di Γ :

1. $\exists z.R(z)$

2. $\forall z.R(z)$

In caso positivo fornire una dimostrazione formale, in caso negativo dare un'opportuna interpretazione come controesempio.

[Esercizio 2]

Si dica se le seguenti proprietà su insiemi sono valide:

1. $\forall A, B. ((A - B \subseteq B - A) \rightarrow (A \subseteq B))$

2. $\forall A, B. ((A - B \subseteq B - A) \rightarrow (B \subseteq A))$

In caso positivo fornire una dimostrazione formale, in caso negativo dare un controesempio.

[Esercizio 3]

Dimostrare per induzione che: $\forall n. 3|(7^n - 1)$.

Giustificare con commenti precisi tutti i passaggi della dimostrazione.

[Esercizio 4]

Si considerino le seguenti relazioni:

1. $R_1 = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z} \wedge \exists x \in \mathbb{N}. n = m \cdot 10^x\}$

2. $R_2 = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z} \wedge \exists y, k \in \mathbb{N}. n = m \cdot k \cdot 2^y\}$

3. $R_3 = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z} \wedge \exists z, h \in \mathbb{N}. n = m \cdot h \cdot 5^z\}$

Si risponda alle seguenti domande, giustificando la risposta:

1. R_1 è riflessiva? Irriflessiva? Simmetrica? Transitiva?

2. R_2 è riflessiva? Irriflessiva? Simmetrica? Transitiva?

3. R_3 è riflessiva? Irriflessiva? Simmetrica? Transitiva?

4. l'insieme R_1 include, è incluso o è uguale a $R_2 \cap R_3$?