

# RELAZIONI

In questa sezione presenteremo un concetto ben noto quello di *relazione*. Una relazione è una associazione tra elementi di due insiemi. Pensiamo alla relazione di parentela tra due individui, alla relazione di minore uguale tra due numeri etc.

**Definizione 0.1 (Relazioni)** *Siano  $A$  e  $B$  due insiemi. Una relazione (binaria)<sup>1</sup> su  $A \times B$  è un sottoinsieme di  $A \times B$ , ovvero  $R \subseteq A \times B$ .*

Nel seguito useremo la notazione  $aRb$  invece che  $(a, b) \in R$  per indicare che  $a \in A$  è in relazione con  $b \in B$ . Tipici esempi di relazioni che abbiamo già ampiamente visto sono

1.  $\{(n, m) \mid n \leq m\} \subseteq \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ ;
2.  $\{(A, B) \mid A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ , dove  $\mathcal{I}$  è l'insieme degli insiemi.

**Esempio 0.2** *Se consideriamo  $A = \{0, 1, 2\}$  e  $B = \{a, b\}$  relazioni su  $A \times B$  sono*

1.  $R_1 = \{(1, a), (2, b)\}$ ;
2.  $R_2 = \{(1, a), (1, b)\}$ ;
3.  $R_3 = \{(1, a), (2, b), (0, b)\}$ .

Il concetto di relazione si può estendere in modo ovvio a relazioni ad  $n$ -argomenti. Una relazione su  $A_1 \times \dots \times A_n$  è un sottoinsieme del prodotto cartesiano  $A_1 \times \dots \times A_n$ , ovvero  $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$ . Nel seguito quando non altrimenti specificato quando diciamo relazione intendiamo relazione binaria.

Una relazione  $R$  su  $A \times B$  è una associazione tra elementi di  $A$  e di  $B$  simile a quella determinata da una funzione. In effetti esiste una ovvia connessione tra funzioni e relazioni. Ricordiamo (vedi Sezione ??) che una funzione  $f : A \rightarrow B$  è una associazione che assegna ad ogni elemento  $a \in A$  esattamente un elemento di  $B$ , detto  $f(a)$ .

Una funzione  $f : A \rightarrow B$  può essere vista come una relazione su  $A \times B$ ,

$$R_f = \{(a, b) \mid f(a) = b\}.$$

Vice-versa non è detto che una relazione  $R$  su  $A \times B$  determini una funzione  $f_R : A \rightarrow B$ .

---

<sup>1</sup>a due argomenti.

**Esempio 0.3** Consideriamo per esempio gli insiemi  $A$  e  $B$  dell'Esempio 0.2:

1. La relazione  $R_1 = \{(1, a), (2, b)\}$  non corrisponde ad una funzione. Infatti chi è  $f_{R_1}(0)$ ?
2. La relazione  $R_2 = \{(1, a), (1, b)\}$  non corrisponde ad una funzione. Infatti chi è  $f_{R_2}(1)$ ?
3. La relazione  $R_3 = \{(1, a), (2, b), (0, b)\}$  corrisponde alla funzione  $f_{R_3} : A \rightarrow B$ , dove  $f_{R_3}(1) = a$ ,  $f_{R_3}(2) = b$  ed  $f_{R_3}(0) = b$ .

**Nota 0.4** La connessione tra funzioni e relazioni spiegata in precedenza l'abbiamo già incontrata nel corso delle lezioni precedenti senza farvi esplicito riferimento. Per esempio pensiamo alle interpretazioni della Logica Predicativa (vedi Sezione ??).

Una interpretazione  $\mathcal{I}$  è una coppia  $(\mathcal{D}_{\mathcal{I}}, \alpha_{\mathcal{I}})$  dove  $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$  è il dominio ed  $\alpha_{\mathcal{I}}$  è una funzione che assegna un significato ai simboli di costante, di funzione e di predicato. In particolare  $\alpha_{\mathcal{I}} : \mathcal{P} \rightarrow P^{\mathcal{I}}$  associa ad ogni simbolo di predicato  $P$  ad  $n$  argomenti una funzione detta  $P^{\mathcal{I}}$  tale che

$$P^{\mathcal{I}} : \mathcal{D}_{\mathcal{I}}^n \rightarrow \{0, 1\}.$$

Come abbiamo visto l'interpretazione di un simbolo di predicato  $P$  si può descrivere alternativamente come una relazione su  $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}^n$ , detta Truth Set. Per esempio per un predicato  $P$  a due argomenti l'interpretazione sul dominio  $\mathcal{D}_{\mathcal{I}} = \{a, b\}$  data dalla funzione di interpretazione

$$P^{\mathcal{I}}(a, a) = 1$$

$$P^{\mathcal{I}}(a, b) = 1$$

$$P^{\mathcal{I}}(b, b) = 0$$

$$P^{\mathcal{I}}(b, a) = 0$$

può essere descritta anche dalla relazione

$$TS_{\mathcal{I}}(P) = \{(a, a), (a, b)\} \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{I}} \times \mathcal{D}_{\mathcal{I}}.$$

Vice-versa una relazione  $R$  su  $A^n$  può essere vista come una interpretazione del simbolo di predicato  $R$  ad  $n$  argomenti sul dominio  $A$ .

## 1 Proprietà di Base

Vediamo le principali proprietà delle relazioni.

**Definizione 1.1 (Riflessiva)** Una relazione  $R$  su  $A \times A$  è riflessiva sse, per ogni  $a \in A$ ,  $aRa$ .

In sostanza una relazione  $R$  su  $A \times A$  è riflessiva sse la seguente formula

$$\forall a(aRa) \text{ (Rifl)}$$

è vera rispetto all'ovvia interpretazione determinata dalla relazione (vedi Nota 0.4).

**Esempio 1.2** Consideriamo le seguenti relazioni sul dominio degli interi  $\mathcal{Z}$ :

1.  $R_1 = \{(n, m) \mid n \leq m\}$ ;

2.  $R_2 = \{(n, m) \mid n < m\}$ ;

3.  $R_3 = \{(n, m) \mid n \setminus m\}$ .

$R_1$  è riflessiva dato che sul dominio degli interi, con l'interpretazione standard di  $\leq$ ,  $\forall n(n \leq n)$  è vera<sup>2</sup>.  $R_2$  invece non è riflessiva dato che  $\forall n(n < n)$  è ovviamente falsa.

$R_3$  è riflessiva in quanto sul dominio degli interi, con l'interpretazione standard di  $\setminus$ ,  $\forall n(n \setminus n)$  è vera. Ogni numero intero è infatti divisore di se stesso.

**Definizione 1.3 (Simmetrica ed Antisimmetrica)** Una relazione  $R$  su  $A \times A$  è

1. simmetrica sse per ogni  $a, b \in A$ , se  $aRb$  allora  $bRa$ ;

2. antisimmetrica sse per ogni  $a, b \in A$ , se  $aRb$  e  $bRa$  allora  $a = b$ .

In sostanza una relazione  $R$  su  $A \times A$  è

1. simmetrica sse la seguente formula è vera

$$\forall a, b(aRb \rightarrow bRa) \text{ (Simm)}$$

2. antisimmetrica sse la seguente formula

$$\forall a, b(aRb \wedge bRa \rightarrow a = b) \text{ (AntiSimm)}$$

**Esempio 1.4** Consideriamo le relazioni dell'Esempio 1.2.

1.  $R_1 = \{(n, m) \mid n \leq m\}$  non è simmetrica. Infatti

$$\forall n, m(n \leq m \rightarrow m \leq n)$$

non è vera. Controesempio:  $1 \leq 3$  e  $3 \not\leq 1$ .

$R_1$  è invece antisimmetrica. Infatti la seguente formula è vera

$$\forall n, m(n \leq m \wedge m \leq n \rightarrow m = n).$$

---

<sup>2</sup>Notate che  $\forall n(n \leq n)$  è ottenuta istanziando la variabile  $R$  nell'assioma (Rifl) con la relazione in esame.

2.  $R_2 = \{(n, m) \mid n < m\}$  non è simmetrica (analogamente a sopra).  $R_2$  è invece antisimmetrica. La formula

$$\forall n, m (n < m \wedge m < n \rightarrow m = n)$$

è vera. Infatti per ogni coppia di valori  $n$  ed  $m$  abbiamo che la premessa dell'implicazione  $n < m \wedge m < n$  è falsa.

3.  $R_3 = \{(n, m) \mid n \setminus m\}$  non è simmetrica. Infatti la formula

$$\forall n, m (n \setminus m \rightarrow m \setminus n)$$

non vale. Controesempio:  $1 \setminus 3$  e  $3 \not\setminus 1$ .

$R_3$  è invece antisimmetrica. Infatti la seguente formula è vera

$$\forall n, m (n \setminus m \wedge m \setminus n \rightarrow m = n).$$

**Esempio 1.5** Consideriamo la relazione tra interi

$$R_4 = \{(n, m) \mid n = m \vee n = -m\}.$$

La relazione è simmetrica. Istanziando l'assioma (Simm) abbiamo infatti

$$\forall n, m (n = m \vee n = -m \rightarrow m = n \vee m = -n).$$

Questa formula è vera dato che se la premessa è vera ci sono due casi, o  $n = m$  oppure  $n = -m$ . Nel primo caso la conclusione è banalmente vera. Nel secondo caso abbiamo  $n = -m$ , ovvero  $m = -n$  e quindi la conclusione è ancora vera.

La relazione non è invece antisimmetrica. Infatti la formula

$$\forall n, m ((n = m \vee n = -m) \wedge (m = n \vee m = -n) \rightarrow m = n)$$

è falsa. Controesempio  $n = 1$  ed  $m = -1$ . La premessa è vera ma la conclusione  $1 = -1$  è falsa.

**Definizione 1.6 (Transitiva)** Una relazione  $R$  su  $A \times A$  è transitiva sse per ogni  $a, b, c \in A$ , se  $aRb$  e  $bRc$  allora  $aRc$ .

In sostanza una relazione  $R$  su  $A \times A$  è transitiva sse la seguente formula

$$\forall a, b, c (aRb \wedge bRc \rightarrow aRc) \text{ (Trans)}$$

è vera rispetto all'ovvia interpretazione determinata dalla relazione.

Le relazioni dell'Esempio 1.2 sono tutte transitive. Ricordate che

$$\forall a, b, c (a \setminus b \wedge b \setminus c \rightarrow a \setminus c)$$

segue dal Lemma ??.

**Esempio 1.7** Consideriamo la relazione sugli interi<sup>3</sup>

$$R_5 = \{(n, m) \mid n = m + 1\}.$$

$R_5$  non è transitiva. Infatti la formula

$$\forall a, b, c (a = b + 1 \wedge b = c + 1 \rightarrow a = c + 1)$$

è falsa, dato che  $a = c + 2$  segue da  $a = b + 1 \wedge b = c + 1$ .

Verificate per esercizio se  $R_5$  è riflessiva, simmetrica o antisimmetrica.

Data una delle proprietà viste in precedenza, si può definire il concetto di *chiusura* di una relazione rispetto alla proprietà.

**Definizione 1.8 (Chiusura)** Sia  $R$  una relazione su  $A \times A$ . La chiusura riflessiva (risp. transitiva, simmetrica, antisimmetrica) di  $R$  è la minima<sup>4</sup> relazione riflessiva (risp. transitiva, simmetrica, antisimmetrica)  $S$  su  $A \times A$  tale che  $R \subseteq S$ .

Vediamo alcuni esempi e vediamo come si determina la chiusura di una relazione rispetto ad una certa proprietà.

**Esempio 1.9** Consideriamo la seguente relazione sull'insieme  $A = \{1, 2, 3\}$

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 2)\}.$$

La relazione non è riflessiva dato che  $(2, 2), (3, 3) \notin R$ . La chiusura riflessiva di  $R$  è

$$\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\}.$$

Come suggerito dall'Esempio 1.9 la chiusura riflessiva di una relazione  $R$  si può ottenere banalmente come

$$S = R \cup \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

**Esempio 1.10** Consideriamo la relazione su  $A = \{1, 2\}$

$$R = \{(1, 2)(2, 1)\}.$$

La relazione non è transitiva in quanto  $(1, 2), (2, 1) \in R$  ed  $(1, 1) \notin R$  e  $(2, 1), (1, 2) \in R$  ed  $(2, 2) \notin R$ .

Come si calcola la chiusura transitiva di  $R$ ? Proviamo come nel caso della chiusura riflessiva ad aggiungere le coppie mancanti, ovvero

$$\{(a, c) \in A \times A \mid (a, b), (b, c) \in R\}.$$

Otteniamo

$$S = \{(1, 2)(2, 1), (1, 1), (2, 2)\}.$$

La relazione  $S$  è transitiva, contiene  $R$  ed è ovviamente la minima (nel senso che ogni  $S'$  tale che  $R \subseteq S'$ ,  $S$  transitiva è tale che  $S \subseteq S'$ ). Quindi  $S$  è la chiusura transitiva.

---

<sup>3</sup>che corrisponde alla funzione  $f(x) = x - 1$ .

<sup>4</sup>Rispetto ad  $\subseteq$ .

Il seguente esempio mostra che la tecnica usata per trovare la chiusura transitiva nell'Esempio 1.10 non funziona però in generale.

**Esempio 1.11** Consideriamo la relazione su  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}.$$

La relazione non è transitiva, dato che  $(1, 2), (2, 3) \in R$  e  $(1, 3) \notin R$  e  $(2, 3), (3, 4) \in R$  e  $(2, 4) \notin R$ . Aggiungendo l'insieme delle coppie mancanti otteniamo

$$S_1 = R \cup \{(1, 3), (2, 4)\}.$$

La relazione  $S_1$  non è transitiva. Infatti abbiamo  $(1, 3), (3, 4) \in S_1$  e  $(1, 4) \notin S_1$ . Le coppie aggiunte hanno dato luogo ad altri casi che falsificano la proprietà transitiva. Bisogna quindi ripetere il procedimento fino ad ottenere una relazione transitiva. Aggiungendo la coppia mancante  $(1, 4)$  troviamo la relazione

$$S_2 = R \cup \{(1, 3), (2, 4), (1, 4)\}.$$

La relazione  $S_2$  è transitiva ed è la minima per costruzione.

L'Esempio 1.11 suggerisce che per calcolare la chiusura transitiva di una relazione  $R$  bisogna aggiungere le coppie mancanti fino ad arrivare ad una relazione transitiva. Un procedimento alternativo per calcolare la chiusura transitiva è basato sulla determinazione dei cammini nel grafo corrispondente alla relazione.

Un grafo diretto  $G$  consiste di una coppia  $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , dove  $\mathcal{N}$  è l'insieme dei nodi ed  $\mathcal{A}$  è una relazione su  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ . Ogni coppia  $(a, b) \in \mathcal{A}$  si dice arco del grafo.

Siano  $a, b$  due nodi in un grafo diretto  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ . Esiste un cammino tra  $a$  e  $b$  di lunghezza  $n$  sse esistono  $n - 1$  nodi,  $a_1, \dots, a_{n-1}$ , tali che

$$(a, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, b) \in \mathcal{A}.$$

Data una relazione  $R$  su  $A \times A$  chiamiamo  $G_R$  il grafo diretto corrispondente, ovvero  $G_R = (A, R)$ . Inoltre definiamo per  $i \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$R^i = \{(a, b) \mid \text{esiste un cammino di lunghezza } i \text{ tra } a \text{ e } b \text{ nel grafo } G_R\}$$

$$R^* = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} R^i.$$

Notate che  $R^*$  è di fatto l'insieme delle coppie  $(a, b)$  per le quali esiste un cammino tra  $a$  e  $b$  di qualche lunghezza nel grafo che descrive  $R$ .

**Esempio 1.12** Consideriamo la relazione dell'Esempio 1.11 su  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}.$$

Abbiamo

$$R^1 = R$$

$$R^2 = \{(1, 3), (2, 4)\}$$

$$R^3 = \{(1, 4)\}$$

$$R^4 = \emptyset$$

$$R^5 = \emptyset$$

...

È ovvio che per  $n \geq 4$  abbiamo  $R^n = \emptyset$ . Quindi,  $R^* = R \cup R_2 \cup R_3 = R \cup \{(1, 3), (2, 3), (1, 4)\}$ .

La relazione  $R^*$  è la chiusura transitiva di  $R$  come dimostrato di seguito.

**Lemma 1.13** Sia  $R$  una relazione transitiva su  $A \times A$ . Allora  $R^* \subseteq R$ .

**Prova:** Facciamo vedere per induzione su  $n$  che  $R^n \subseteq R$ .

**Caso Base** Ovvio, dato che  $R^1 = R$ ;

**Caso induttivo** Assumiamo che  $R^n \subseteq R$  e facciamo vedere che  $R^{n+1} \subseteq R$ .

Consideriamo  $(a, b) \in R^{n+1}$ . Per Def. significa che esiste un cammino di lunghezza  $n + 1$  tra  $a$  e  $b$ . Quindi esistono  $n$  nodi,  $a_1, \dots, a_n$ , tali che

$$(a, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_n, b) \in R.$$

Notiamo che esiste un cammino di lunghezza  $n$  tra  $a$  ed  $a_n$ , quindi  $(a, a_n) \in R^n$ . Dato che  $(a, a_n) \in R^n$  e che, per ipotesi induttiva,  $R^n \subseteq R$  abbiamo  $(a, a_n) \in R$ .

Dato che  $(a, a_n), (a_n, b) \in R$  e dato che  $R$  è per ipotesi una relazione transitiva otteniamo  $(a, b) \in R$ .

□

**Teorema 1.14** Sia  $R$  una relazione su  $A \times A$ .  $R^*$  è la chiusura transiva di  $R$ .

**Prova:** Abbiamo che  $R \subseteq R^*$  dato che  $R^1 = R$ . Bisogna quindi mostrare che  $R^*$  è una relazione transitiva e che è minima.

Assumiamo che  $(a, b), (b, c) \in R^*$ . Per Def. di  $R^*$  esistono  $n, k$  tali che  $(a, b) \in R^n$  ed  $(b, c) \in R^k$ . Per Def. vuol dire che esiste un cammino tra  $a$  e  $b$  di lunghezza  $n$  ed un cammino di lunghezza  $k$  tra  $b$  e  $c$ . Quindi esiste un cammino di lunghezza  $n+k$  tra  $a$  e  $c$ . Per Def. abbiamo  $(a, c) \in R^{n+k}$  e quindi  $(a, c) \in R^*$ . Per dimostrare la minimalità assumiamo che  $R^*$  non sia minimale, ovvero che esista una relazione transitiva  $S$  tale che  $R \subseteq S \subset R^*$ .

Dato che  $R \subseteq S$  allora  $R^* \subseteq S^*$  (ogni cammino di  $R$  è cammino di  $S$ ). Quindi  $S \subset R^* \subseteq S^*$ . Inoltre dato che  $S$  è transitiva abbiamo dal Lemma 1.13  $S^* \subseteq S$ . Quindi otteniamo un assurdo  $S^* \subseteq S \subset R^* \subseteq S^*$ . □

**Nota 1.15 (Chiusura Transitiva)** Grazie al Teorema 1.14 possiamo calcolare la chiusura transitiva tramite  $R^*$ . Nella pratica si può dimostrare che se il grafo contiene  $n$  nodi è sufficiente calcolare  $R^i$  solo per  $i \in \{1, n\}$ . Per esempio nell'Esempio 1.12 abbiamo visto che il calcolo termina con  $n = 4$ .

## 2 Relazioni di Equivalenza

**Definizione 2.1 (Equivalenze)** Una relazione  $R$  su  $A \times A$  si dice relazione di equivalenza sse è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Vediamo alcuni esempi. Supponiamo di avere una relazione  $R$  sull'insieme degli studenti dove  $xRy$  sse  $x$  ed  $y$  hanno un cognome che inizia per la stessa lettera. È ovvio che  $R$  è una relazione di equivalenza.

Consideriamo la relazione tra interi dell'Esempio 1.5 (vedi Sezione 1)

$$R = \{(n, m) \mid n = m \vee n = -m\}.$$

Come abbiamo visto nella Sezione 1  $R$  soddisfa la proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Quindi è una relazione di equivalenza.

Una ben nota relazione di equivalenza sugli interi è la relazione di *congruenza*. Siano  $a$  ed  $m$  due numeri interi con  $m$  positivo. Si indica con  $a \bmod m$  il resto della divisione di  $a$  per  $m$ . Per esempio  $4 \bmod 2 = 0$ ,  $13 \bmod 2 = 1$ ,  $2 \bmod 2 = 0$  e  $-1 \bmod 2 = 1$ .

**Definizione 2.2 (Congruenza)** Siano  $a, b$  due numeri interi ed  $m$  un numero intero positivo. Si dice che  $a$  è congruente a  $b$  ( $a \equiv_m b$ ) sse  $a \bmod m = b \bmod m$ .

Per esempio, abbiamo  $4 \equiv_2 8 \equiv_2 2 \equiv_2 -2$  e  $4 \not\equiv_2 9$  dato che  $9 \bmod 2 = 1$ . La congruenza modulo  $m$  è una relazione di equivalenza. Infatti abbiamo (dalla Def. 2.2) per ogni  $a, b, c \in \mathcal{Z}$ ,

1.  $a \equiv_m a$ ;
2. Se  $a \equiv_m b$  allora  $b \equiv_m a$ ;
3. Se  $a \equiv_m c$  e  $c \equiv_m b$  allora  $a \equiv_m b$ .

Le relazioni di equivalenza hanno una caratteristica importante: determinano una partizione dell'insieme su cui sono definite. Dato un insieme  $A$  ed una famiglia  $\{A_i\}_{i \in I}$ , dove  $A_i \subseteq A$ , per ogni  $i \in I$ , è una *partizione* di  $A$  sse  $\bigcup_{i \in I} A_i = A$  e  $A_i \cap A_j = \emptyset$  per ogni  $i, j \in I$  con  $i \neq j$ .

La partizione è basata sul concetto fondamentale di *classe di equivalenza*. Intuitivamente, la classe di equivalenza di un oggetto contiene tutti gli oggetti con cui è in relazione.

**Definizione 2.3 (Classi di equivalenza)** Sia  $R$  una relazione di equivalenza su  $A \times A$  ed  $a \in A$ . Definiamo la classe di equivalenza di  $a$  come

$$[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}.$$

**Esempio 2.4** Consideriamo la seguente relazione di equivalenza sull'insieme  $A = \{1, 2, 3\}$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$$

Abbiamo  $[1]_R = \{1, 2\}$ ,  $[2]_R = \{1, 2\}$  e  $[3]_R = \{3\}$ . Notate che  $[1]_R = [2]_R$  dato che  $(1, 2), (2, 1) \in R$ , mentre  $[1]_R \neq [3]_R$  dato che  $(1, 3) \notin R$ ,  $(2, 3) \notin R$ . Inoltre  $[1]_R \cap [3]_R = \emptyset$ .

Nel caso in cui la relazione di equivalenza sia la congruenza modulo  $m$  si usa  $[n]_m$  per indicare la classe di equivalenza  $[n]_{\equiv m}$ .

**Esempio 2.5** Consideriamo la congruenza modulo 2. Abbiamo

- $[2]_2 = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ ;
- $[4]_2 = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ ;
- $[1]_2 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ .

In altre parole la classe di congruenza di 2 contiene tutti i multipli di 2, e coincide con la classe di equivalenza di 4 (e di ogni altro multiplo di 2). Inoltre  $[2]_2 \cap [1]_2 = \emptyset$ .

Gli Esempi 2.4 e 2.5 suggeriscono le seguenti proprietà:

- due elementi sono equivalenti sse hanno la stessa classe di equivalenza;
- due classi di equivalenza coincidono sse hanno un elemento in comune.

**Teorema 2.6** Sia  $R$  una relazione di equivalenza su  $A \times A$  ed  $a, b \in A$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $aRb$ ;
2.  $[a]_R = [b]_R$ ;
3.  $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ .

**Prova:**  $(1 \leftrightarrow 2)$  Assumiamo che  $aRb$ . Per Def. abbiamo  $b \in [a]_R$ . Dato che  $[a]_R = \{c \mid aRc\}$  e  $[b]_R = \{d \mid bRd\}$  dalla proprietà transitiva e simmetrica di  $R$  abbiamo  $[a]_R = [b]_R$ . Vice-versa se  $[a]_R = [b]_R$  allora dato che  $b \in [b]_R$  abbiamo  $b \in [a]_R$ . Quindi  $aRb$ .

$(2 \leftrightarrow 3)$  Se  $[a]_R = [b]_R$  allora ovviamente  $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ . Vice-versa assumiamo che  $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ . Vuol dire che esiste  $c \in A$  tale che  $c \in [a]_R$  e  $c \in [b]_R$ . Per Def. vuol dire che  $aRc$  e  $bRc$ . Dalla proprietà simmetrica e transitiva abbiamo  $aRb$ . Quindi da quello mostrato di sopra abbiamo  $[a]_R = [b]_R$ .  $\square$

Di conseguenza due elementi non sono congruenti sse le loro classi di congruenza sono disgiunte.

**Corollario 2.7** Sia  $R$  una relazione di equivalenza su  $A \times A$  ed  $a, b \in A$ . Abbiamo  $(a, b) \notin R$  sse  $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ .

**Prova:** Immediato dal Teorema 2.6. □

Il Teorema 2.6 ed il Corollario 2.7 dimostrano che l'insieme  $A$  su cui è definita una relazione di equivalenza  $R$  viene partizionato in sottoinsiemi disgiunti, ognuno contenente *tutti e soli* gli elementi che sono in relazione tra di loro.

**Esempio 2.8** Consideriamo la relazione di equivalenza sull'insieme  $A = \{1, 2, 3\}$  dell'Esempio 2.4

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3)\}.$$

La relazione  $R$  determina la seguente partizione di  $A$  in due sottoinsiemi disgiunti:  $[1]_R = [2]_R = \{1, 2\}$  e  $[3]_R = \{3\}$ .

Consideriamo le classi di congruenza modulo  $m$ . La congruenza modulo  $m$  induce una partizione dell'insieme degli interi data dalle seguenti classi di equivalenza,  $[0]_m, [1]_m, [2]_m, \dots$  ed  $[m-1]_m$ . Notate che le classi di equivalenza sono esattamente  $m$ , dato che rispetto ad  $m$  ci possono essere al più  $m$  resti diversi<sup>5</sup>, ovvero  $0, 1, \dots, m-1$ .

**Esempio 2.9** La partizione di  $\mathcal{Z}$  determinata dalla congruenza modulo 2 è data da esattamente due insiemi disgiunti, quello dei numeri pari  $[2]_2$  e quello dei numeri dispari  $[1]_2$ :

- $[2]_2 = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ ;
- $[1]_2 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ .

### 3 Ordinamenti Parziali

Un altro tipo di relazioni particolarmente importanti sono gli ordinamenti parziali.

**Definizione 3.1 (Ordinamento Parziale)** Una relazione  $R$  su  $A \times A$  è un ordinamento parziale sse è riflessiva, transitiva ed antisimmetrica.

Se  $R$  è un ordinamento parziale su  $A \times A$  si dice che  $A$  è un insieme parzialmente ordinato e si usa la notazione  $(A, R)$ .

**Esempio 3.2** Sia  $(\mathcal{Z}, \leq)$  che  $(\mathcal{Z}, \geq)$  sono ordinamenti parziali. Abbiamo infatti fatto vedere (vedi Sezione 1) che  $\leq$  e  $\geq$  godono della proprietà riflessiva, transitiva ed antisimmetrica.

Consideriamo la relazione  $\setminus = \{(a, b) \in \mathcal{Z}^+ \times \mathcal{Z}^+ \mid a \setminus b\}$ . Abbiamo visto (vedi Sezione 1) che  $\setminus$  è transitiva, riflessiva ed antisimmetrica. Quindi  $(\mathcal{Z}^+, \setminus)$  è un ordinamento parziale.

Notate invece che le relazioni  $<$  e  $>$  sono transitive ed antisimmetriche e non sono riflessive. Quindi non sono ordinamenti parziali.

<sup>5</sup>ricordate che il resto  $r$  deve essere tale che  $0 \leq r < m$ .

**Esempio 3.3** Consideriamo la relazione  $\subseteq$  su  $\wp(A)$  per un insieme  $A$ . Come abbiamo visto nella Proposizione ?? (vedi Sezione ??) abbiamo che, per ogni  $B, C, D \subseteq A$ ,

1.  $B \subseteq B$  (Proprietà Riflessiva);
2. Se  $C \subseteq B$  e  $B \subseteq D$ , allora  $C \subseteq D$  (Proprietà Transitiva);
3. Se  $C \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ , allora  $C = B$  (Proprietà Antisimmetrica).

Quindi  $(\wp(A), \subseteq)$  è un insieme parzialmente ordinato.

Sia  $(A, \preceq)$  un insieme parzialmente ordinato. Due elementi  $a, b \in A$  si dicono *incomparabili* sse vale  $a \not\preceq b \wedge b \not\preceq a$ . Un ordinamento parziale  $(A, \preceq)$  si dice *totale* sse vale  $\forall a, b (a \preceq b \vee b \preceq a)$ .

**Esempio 3.4** Consideriamo  $(\wp(A), \subseteq)$  dove  $A = \{1, 2, 3\}$ . Abbiamo

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}.$$

Il sottoinsieme  $\{1, 2\}$  ed il sottoinsieme  $\{1, 3\}$  non sono confrontabili in quanto  $\{1, 2\} \not\subseteq \{1, 3\}$  e  $\{1, 3\} \not\subseteq \{1, 2\}$ . L'ordinamento  $\subseteq$  su  $\wp(A)$  non è quindi totale.

**Esempio 3.5** Consideriamo gli ordinamenti sugli interi dell'Esempio 3.2. La relazione  $\setminus$  su  $\mathcal{Z}^+$  non è un ordinamento totale. Infatti  $3 \setminus 5$  e  $5 \setminus 3$ .

Le relazioni  $\leq$  e  $\geq$  su  $\mathcal{Z}$  sono ordinamenti totali dato che per ogni  $n, m \in \mathcal{Z}$  vale  $n \leq m \vee m \leq n$ .

**Definizione 3.6** Sia  $(A, \preceq)$  un insieme parzialmente ordinato e  $B \subseteq A$ . Un elemento  $a \in B$  è il *minimo* (resp. il *massimo*) di  $B$  sse per ogni  $b \in B$ ,  $a \preceq b$  (resp.  $b \preceq a$ ).

**Esempio 3.7** Consideriamo l'insieme parzialmente ordinato  $(\mathcal{Z}, \leq)$ .  $\mathcal{Z}$  non ha massimo e minimo rispetto a  $\leq$ . Notate invece che  $(\mathcal{Z}^+, \leq)$  ha un minimo, ovvero 1.

**Esempio 3.8** Consideriamo l'insieme parzialmente ordinato  $(\wp(A), \subseteq)$  dell'Esempio 3.4. Abbiamo

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}.$$

Il minimo di  $\wp(A)$  è  $\emptyset$ , ed il massimo è  $A$ .

**Esempio 3.9** Consideriamo l'insieme parzialmente ordinato  $(\mathcal{Z}^+, \setminus)$  dove  $\setminus$  è la relazione dell'Esempio 3.2. Sia  $A \subseteq \mathcal{Z}^+$  dove  $A = \{2, 4, 5, 20\}$ .

Quindi  $\setminus$  contiene le seguenti coppie

$$(2, 4), (2, 20), (5, 20), (4, 20), \dots$$

L'insieme  $A$  non ha minimo dato che 2 e 5 non sono confrontabili, ovvero  $2 \setminus 5$  e  $5 \setminus 2$ . L'insieme ha invece massimo ovvero 20. Infatti 20 è divisibile sia per 2, per 4, per 5 e per 20.

**Proposizione 3.10** *Sia  $(A, \preceq)$  un insieme parzialmente ordinato. Se  $A$  ha un minimo (risp. massimo), allora questo minimo (risp. massimo) è unico.*

**Prova:** Supponiamo per assurdo che esistano due elementi distinti  $a$  e  $b$ , con  $a, b \in A$ , tali che  $\forall c(a \preceq c)$  e  $\forall c(b \preceq c)$ . Istanziando  $\forall c(a \preceq c)$  con  $c = b$  otteniamo  $a \preceq b$ . Analogamente otteniamo  $b \preceq a$ . Da  $a \preceq b$  e  $b \preceq a$  per la proprietà antisimmetrica di  $\preceq$  otteniamo  $a = b$  che contraddice l'ipotesi  $a \neq b$ .  $\square$

**Definizione 3.11** *Un insieme parzialmente ordinato  $(A, \preceq)$  si dice ben ordinato sse  $\preceq$  è un ordinamento totale e se ogni  $B \subseteq A$  ha un minimo.*

Un esempio importante di insieme ben ordinato (ben fondato) è  $\mathcal{Z}^+$  con l'ordinamento  $\leq$ . Notate invece che  $(\mathcal{Z}, \leq)$  non è ben ordinato, dato che  $\mathcal{Z}$  non ha minimo.

Gli insiemi ben ordinati sono importanti perchè sono quelli su cui si può ragionare per induzione. Se guardate il ragionamento che spiega la correttezza del principio di induzione (Nota ??) vedrete che le proprietà di  $\mathcal{Z}^+$  che si usano sono esattamente quelle della Definizione 3.11.

## 4 Esercizi

**Esercizio 4.1** *Si determini di quali proprietà (riflessiva, simmetrica e transitiva) godono le seguenti relazioni sull'insieme  $A = \{1, 2, 3\}$ :*

1.  $R_1 = \emptyset$ ;
2.  $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ;
3.  $R_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ;
4.  $R_4 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 1)\}$ .

*Si dica cosa cambia qualora le relazioni fossero definite su  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  invece che su  $A = \{1, 2, 3\}$ .*

*Ricordiamo (vedi Sezione 1) che una relazione  $R$  su  $A$  è*

- riflessiva sse  $\forall x(xRx)$  è vera nell'interpretazione che ha come dominio  $A$  ed in cui il truth set del simbolo di predicato  $R$  è proprio la relazione  $R$ ;
- transitiva sse  $\forall x, y, z(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$  è vera nell'interpretazione che ha come dominio  $A$  ed in cui il truth set del simbolo di predicato  $R$  è proprio la relazione  $R$ ;
- simmetrica sse  $\forall x, y(xRy \rightarrow yRx)$  è vera nell'interpretazione che ha come dominio  $A$  ed in cui il truth set del simbolo di predicato  $R$  è proprio la relazione  $R$ .

La relazione  $R_1 = \emptyset$  è simmetrica e transitiva, ma non è riflessiva. Per esempio  $(1, 1) \notin R_1$ . Notate che la relazione soddisfa sia  $\forall x, y, z (xR_1y \wedge yR_1z \rightarrow xR_1z)$  che  $\forall x, y (xR_1y \rightarrow yR_1x)$ , visto che per tutti gli elementi del dominio  $A$  la premessa dell'implica è falsa.

La relazione  $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$  è ovviamente riflessiva. Inoltre è simmetrica: la formula  $\forall x, y, z (xR_2y \rightarrow xR_2z)$  è vera in quanto  $(x, y) \in R_2$  sse  $x = y$ . La relazione è anche transitiva: la formula  $\forall x, y (xR_2y \wedge yR_2z \rightarrow xR_2z)$  è vera in quanto  $(x, y), (y, z) \in R_2$  sse ha  $x = y = z$ .

La relazione  $R_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$  è ovviamente simmetrica e non riflessiva. Non è invece transitiva dato che per esempio  $(1, 2), (2, 1) \in R_3$  e  $(1, 1) \notin R_3$ .

La relazione  $R_4 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 1)\}$  è simmetrica e transitiva. Non è riflessiva dato che  $(3, 3) \notin R_4$ .

Se le relazioni sono definite rispetto a  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  le proprietà cambiano. Infatti le formule vanno interpretate rispetto al dominio  $B$  invece che  $A$ . Di conseguenza nessuna delle relazioni soddisfa più la proprietà riflessiva. Infatti  $(4, 4) \notin R_i$  per ogni  $i \in \{1, 4\}$ .

**Esercizio 4.2** Sia  $R$  una relazione su  $A \times A$ . Dire (giustificando la risposta) se le seguenti affermazioni sono vere:

1. Se  $R$  è transitiva e simmetrica, allora è riflessiva;
2.  $R$  è simmetrica sse non è antisimmetrica.

1. Prendendo le definizioni delle proprietà delle relazioni (vedi Sezione 1) l'affermazione equivale a dire che per ogni relazione  $R$ ,  $\forall a (aRa)$  (Pr. riflessiva) segue (è conseguenza logica) dai seguenti assiomi che formalizzano la proprietà simmetrica e transitiva:

$$\forall a, b (aRb \rightarrow bRa) \quad (\text{Simm})$$

$$\forall a, b, c (aRb \wedge bRc \rightarrow aRc) \quad (\text{Trans})$$

Proviamo a dimostrarlo.

**Prova:** Sia  $R$  una relazione che soddisfa la proprietà simmetrica e transitiva. Sia  $a$  un elemento generico. Prendiamo  $b$  tale che  $aRb$ . Dalla proprietà simmetrica abbiamo anche  $bRa$ . Dato che  $aRb$  e  $bRa$  dalla proprietà transitiva troviamo  $aRa$ .  $\square$

Consideriamo però la seguente relazione su  $A = \{1, 2, 3\}$ ,

$$R = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 2)\}.$$

$R$  soddisfa sia la proprietà simmetrica che quella transitiva, ma non soddisfa la proprietà riflessiva. Infatti  $(1, 1) \notin R$ .

Allora qual è l'errore nella prova di sopra? Consideriamo la versione più dettagliata della prova di sopra:

- (a)  $aRb$  (Premessa)
- (b)  $aRb \rightarrow bRa$  ( $\forall$ -I dalla proprietà simmetrica)
- (c)  $bRa$  (modus ponens da 1. e 2.)
- (d)  $aRb \wedge bRa$  (and-intro)
- (e)  $aRb \wedge bRa \rightarrow aRa$  ( $\forall$ -I dalla proprietà transitiva)
- (f)  $aRa$  (modus ponens)
- (g)  $\forall a(aRa)$  ( $\forall$ -G)

La prova parte dalla premessa  $aRb$  che è sbagliata. Se una relazione soddisfa la proprietà transitiva e simmetrica (che erano le uniche ipotesi) non è detto che ci sia per ogni  $a$  almeno un elemento  $b$  in relazione.

Se infatti guardiamo al controesempio che abbiamo dato vediamo che il problema sorge proprio per l'elemento 1 per cui non esiste alcun elemento  $a \in A$  tale che  $(1, a) \in R$ .

L'Esercizio 4.3 mostra che se aggiungiamo questa proprietà (ovvero in formule  $\forall a \exists b(aRb)$ ) alle ipotesi allora riusciamo a dimostrare che la relazione è riflessiva.

2. Prendendo le definizioni delle proprietà delle relazioni abbiamo che una relazione  $R$  su  $A \times A$  è

- (a) simmetrica sse  $\forall a, b(aRb \rightarrow bRa)$  è vera<sup>6</sup>;
- (b) antisimmetrica sse  $\forall a, b(aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$  è vera<sup>7</sup>.

Quindi l'affermazione equivale alla seguente formula,

$$\forall a, b(aRb \rightarrow bRa) \leftrightarrow \neg(\forall a, b(aRb \wedge bRa \rightarrow a = b))$$

Ricordiamoci che, per le Leggi di De Morgan, una relazione non è antisimmetrica sse

$$\neg(\forall a, b(aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)) \equiv \exists a, b(\neg(a = b \vee (\neg aRb \vee \neg bRa))) \equiv \exists a, b(a \neq b \wedge aRb \wedge bRa).$$

Mostriamo che l'affermazione non è valida tramite un controesempio, ovvero mostrando una relazione che falsifica

$$\forall a, b(aRb \rightarrow bRa) \leftrightarrow \exists a, b(a \neq b \wedge aRb \wedge bRa).$$

In particolare mostriamo una relazione  $R$  su un insieme  $A$  che non è simmetrica e non è antisimmetrica. Quindi una relazione che falsifica questo verso della doppia implicazione

$$\exists a, b(a \neq b \wedge aRb \wedge bRa) \rightarrow \forall a, b(aRb \rightarrow bRa).$$

---

<sup>6</sup>Ovviamente rispetto all'interpretazione con dominio  $A$  in cui il truth set del predicato  $R$  è la relazione  $R$ .

<sup>7</sup>Ovviamente rispetto all'interpretazione con dominio  $A$  in cui il truth set del predicato  $R$  è la relazione  $R$ .

Consideriamo  $R$  su  $A = \{1, 2, 3\}$  definita come

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}.$$

$R$  non è antisimmetrica. Infatti vale

$$\exists a, b (a \neq b \wedge aRb \wedge bRa)$$

dato che  $(1, 2) \in R \wedge (2, 1) \in R \wedge 2 \neq 1$ . Inoltre  $R$  non è simmetrica. Infatti non vale

$$\forall a, b (aRb \rightarrow bRa)$$

dato che  $(1, 3) \in R$  e  $(3, 1) \notin R$ .

Il controesempio dimostra che l'implicazione "non antisimmetrica"  $\rightarrow$  "simmetrica" è falsa. Questo è sufficiente per concludere che l'affermazione "non antisimmetrica"  $\leftrightarrow$  "simmetrica" è falsa.

Provate per esercizio a trovare una relazione che falsifichi l'altro verso dell'implicazione "simmetrica"  $\rightarrow$  "non antisimmetrica".

**Esercizio 4.3** Sia  $R$  una relazione su  $A \times A$ . Dire (giustificando la risposta) se la seguente affermazione è vera: se  $R$  è transitiva e simmetrica e se per ogni  $a \in A$  esiste  $b \in A$  tale che  $aRb$ , allora  $R$  è riflessiva.

**Prova:** Sia  $R$  una relazione che soddisfa la proprietà transitiva e simmetrica e tale che per ogni  $a \in A$  esiste  $b \in A$  tale che  $aRb$ . Consideriamo un elemento generico  $a$ . Per ipotesi per ogni  $a \in A$  esiste  $b \in A$  tale che  $aRb$ . Prendiamo quindi  $b$  tale che  $aRb$ . Dalla proprietà simmetrica abbiamo anche  $bRa$ . Dato che  $aRb$  e  $bRa$  dalla proprietà transitiva troviamo  $aRa$ .

□

Dato che le relazioni sono degli insiemi. Le relazioni possono essere combinate tramite le ben note operazioni insiemistiche,  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $-$ .

**Esercizio 4.4** Siano  $R_1$  ed  $R_2$  due relazioni simmetriche su  $A \times A$ . Dire (giustificando la risposta) se

- $R_1 \cup R_2$  è simmetrica;
- $R_1 \cap R_2$  è simmetrica.

Rifare l'esercizio considerando la proprietà transitiva invece che quella simmetrica.

**Esercizio 4.5** Calcolare la chiusura transitiva  $R^*$  della relazione sull'insieme  $A = \{1, 2, 3\}$  (vedi Esempio 1.9)

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 2)\}.$$

Abbiamo

$$R^1 = R$$

$$R^2 = \{(1, 1), (3, 3), (1, 2), (3, 2)\}$$

$$R^3 = \{(1, 3), (3, 1), (3, 2), (1, 2)\}$$

...

Notate che  $(1, 2) \in R$  ed anche  $(1, 2) \in R^2$ . Infatti le coppie  $(1, 2), (2, 2)$  determinano un cammino di lunghezza 2 tra 1 e 2. Analogamente  $(3, 2) \in R^2$  ed anche  $(3, 2) \in R^3$ . Infatti abbiamo due cammini tra 3 e 2: il primo  $(3, 1), (1, 2)$  di lunghezza 2 ed il secondo  $(3, 1), (1, 2), (2, 2)$  di lunghezza 3.

Inoltre  $(1, 3) \in R$  ed  $(1, 3) \in R^3$ , dato che abbiamo due cammini tra 1 e 3: uno di lunghezza 1 ed uno  $(1, 3), (3, 1), (1, 3)$  di lunghezza 3.

Quindi in questo caso non abbiamo un indice  $n$  tale che per ogni  $i \geq n$   $R_i = \emptyset$ , come nell'Esempio 1.12. In ogni caso possiamo affermare che

$$R^* = R \cup R^2$$

dato che per  $i \geq 3$   $R_i \subseteq R \cup R^2$ .

**Esercizio 4.6** Calcolare la chiusura transitiva  $R^*$  della relazione sull'insieme  $A = \{1, 2, 3\}$  (vedi Esempio 1.9)

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 2)\}.$$

**Esercizio 4.7** Sia  $R$  la relazione tra interi dell'Esempio 1.5

$$R = \{(n, m) \mid n = m \vee n = -m\}.$$

Determinare  $[0]_R$  ed  $[2]_R$ .

**Esercizio 4.8** Determinare le classi di equivalenza rispetto a  $\equiv_4$ . Abbiamo

- $[0]_4 = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$ ;
- $[1]_4 = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$ ;
- $[2]_4 = \{\dots, 2, 6, 10, \dots\}$ ;
- $[3]_4 = \{\dots, 13, 7, 11, \dots\}$ .

**Esercizio 4.9** Sia  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ . Determinare quale delle seguenti relazioni è una relazione di equivalenza:

1.  $R_1 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ;
2.  $R_2 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$ ;
3.  $R_3 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ ;

$$4. R_4 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (2, 1), (1, 2)\};$$

$$5. R_5 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (1, 3)\}.$$

In caso affermativo si determini la partizione indotta dalla relazione su  $A$ .

**Esercizio 4.10** Sia  $(A, \preceq)$  un insieme parzialmente ordinato. Diciamo che  $a \in A$  è un elemento minimale di  $A$  sse non esiste  $b \in A$  tale che  $a \neq b$  e  $b \preceq a$ .

Dire se la seguente affermazione è vera: Se  $a$  è un elemento minimale di  $A$  allora  $a$  è il minimo di  $A$ .

**Prova:** Prendendo le definizioni di elemento minimale e di minimo abbiamo

$$1. a \text{ è un minimo sse } \forall b(a \preceq b);$$

$$2. a \text{ è un elemento minimale sse } \neg \exists b(a \neq b \wedge b \preceq a) \equiv \forall b(a = b \vee b \not\preceq a).$$

Bisogna quindi determinare se la seguente formula

$$\neg \exists b(a \neq b \wedge b \preceq a) \rightarrow \forall b(a \preceq b)$$

è conseguenza logica degli assiomi che definiscono un ordinamento parziale.

Mostriamo un controesempio che dimostra la falsità dell'affermazione. In altre parole troviamo un ordinamento parziale  $(A, \preceq)$  ed un elemento  $a \in A$  che soddisfano la premessa  $\neg \exists b(a \neq b \wedge b \preceq a)$  e falsificano la conclusione  $\forall b(a \preceq b)$ .

Consideriamo l'insieme parzialmente ordinato  $(A, \setminus)$  dell'Esempio 3.9 dove  $A = \{2, 4, 5, 20\}$ .

L'insieme  $A$  ha due elementi minimali, ovvero 2 e 5. Infatti valgono le seguenti formule<sup>8</sup>

$$\forall b(b = 2 \vee b \not\setminus 2)$$

$$\forall b(5 = b \vee b \not\setminus 5).$$

Come abbiamo visto non esiste però un minimo. Il problema è che 2 e 5 non sono confrontabili nell'ordinamento parziale  $\setminus$ . Quindi non valgono

$$\forall b(2 \setminus b)$$

$$\forall b(5 \setminus 2).$$

□

**Esercizio 4.11** Sia  $(A, \preceq)$  un insieme parzialmente ordinato dove  $\preceq$  è un ordinamento totale. Diciamo che  $a \in A$  è un elemento minimale di  $A$  sse non esiste  $b \in A$  tale che  $a \neq b$  e  $b \leq a$ .

Dire se la seguente affermazione è vera: Se  $a$  è un elemento minimale di  $A$  allora  $a$  è il minimo di  $A$ .

<sup>8</sup>Notate che dobbiamo valutare le formule rispetto all'interpretazione che ha come dominio  $A$  e come interpretazione di  $\setminus$  quella ovvia.

**Prova:** La differenza rispetto all'Esercizio 4.10 è che in questo caso l'ordinamento  $\preceq$  è totale.

Bisogna quindi determinare se la formula

$$\neg \exists b(a \neq b \wedge b \preceq a) \rightarrow \forall b(a \preceq b)$$

è conseguenza logica degli assiomi che definiscono un ordinamento totale.

Diamone una prova formale:

1.  $\neg \exists b(a \neq b \wedge b \preceq a)$  (Premessa)
2.  $\forall b(a = b \vee b \not\preceq a)$  (equiv da 1.)
3.  $(a = b \vee b \not\preceq a)$  ( $\forall$ -I da 2.)
4.  $a = b$  (Premessa)
5.  $a \preceq b$  (Proprietà Riflessiva di  $\preceq$ )
6.  $a = b \rightarrow a \preceq b$  (metodo di prova dell'implica da 4. e 5.)
7.  $b \not\preceq a$  (Premessa)
8.  $b \preceq a \vee a \preceq b$  (Dal fatto che  $\preceq$  è totale)
9.  $a \preceq b$  (disjunctive syllogism da 7. e 8.)
10.  $b \not\preceq a \rightarrow a \preceq b$  (metodo di prova dell'implica da 6. e 9.)
11.  $a \preceq b$  (per casi da 3. e 6. e 10.)
12.  $\forall b(a \preceq b)$  ( $\forall$ -G)

**Versione Informale:** Assumiamo che valga  $\neg \exists b(a \neq b \wedge b \preceq a)$  per un qualche  $a \in A$ . Dalla Legge di De Morgan abbiamo  $\neg \exists b(a \neq b \wedge b \preceq a) \equiv \forall b(a = b \vee b \not\preceq a)$ .

Se  $a = b$  allora  $a \preceq b$  per la proprietà riflessiva di  $\preceq$ . Se  $b \not\preceq a$  allora abbiamo  $a \preceq b$  dato che  $\preceq$  è un ordinamento totale per cui  $\forall c(a \preceq c \vee c \preceq a)$ . Dato che in entrambi i casi abbiamo  $a \preceq b$  possiamo concludere  $\forall b(a \preceq b)$ .

Notate che l'ordinamento  $(A, \setminus)$  dell'Esercizio 4.10 non è un ordinamento totale.  $\square$

## References

- [1] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and its Applications*. McGraw-Hill International Editions, 1999.
- [2] Daniel J. Velleman *How to Prove it*. Cambridge University Press, 1998.