

**Linguaggio e Metodi della Matematica**

Preparazione alla prova scritta del 3 Novembre 2005

**[Esercizio 1]**

Si consideri la funzione  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  definita come

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{se } z < 0 \\ z^2 + 1 & \text{se } z \geq 0 \end{cases}$$

Si risponda alle seguenti domande, giustificando la risposta:

1.  $f$  è iniettiva?  $f$  è surgettiva?  $f$  è bigettiva?
2. Cosa restituiscono  $f^{-1}(1)$ ,  $f^{-1}(2)$  e  $f^{-1}(5)$ ?

**Svolgimento**

$f$  non è iniettiva perché  $f(-1) = f(0) = 1$ .

$f$  non è surgettiva perché, ad esempio, non esiste  $z \in \mathbb{Z}$  tale che  $f(z) = 0$ .

$f$  non è bigettiva perché non è iniettiva (e neppure surgettiva).

$$f^{-1}(1) = \{-1, 0\}, f^{-1}(2) = \{1\} \text{ e } f^{-1}(5) = \{2\}$$

**[Esercizio 2]**

Dimostrare in almeno due modi diversi che comunque si scelgano tre insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$  vale la seguente uguaglianza tra insiemi, oppure fornire un controesempio:

$$(A \cup \overline{B}) \cap C = (C \cap A) \cup (C - B)$$

**Svolgimento**

I diagrammi di Eulero-Venn (qui omissi) mostrano che gli insiemi sono effettivamente uguali.

Come seconda dimostrazione scegliamo di esporre un argomento discorsivo. Per dimostrare l'uguaglianza dimostriamo separatamente le due inclusioni.

Dimostriamo che  $(A \cup \overline{B}) \cap C \subseteq (C \cap A) \cup (C - B)$ .

Sia  $x \in ((A \cup \overline{B}) \cap C)$ , vogliamo far vedere che  $x \in (C \cap A) \cup (C - B)$ .

Per definizione di intersezione abbiamo  $x \in (A \cup \overline{B})$  e  $x \in C$ .

Da  $x \in (A \cup \overline{B})$ , per definizione di unione abbiamo due possibilità: (1)  $x \in A$  oppure (2)  $x \in \overline{B}$ . Consideriamo i due casi separatamente. In entrambi i casi vorremmo concludere che  $x \in (C \cap A) \cup (C - B)$ .

1. Se  $x \in A$  e siccome sappiamo anche che  $x \in C$  abbiamo, per definizione di intersezione che  $x \in (C \cap A)$ . Quindi, per definizione di unione,  $x \in (C \cap A) \cup (C - B)$ .

2. Se  $x \in \overline{B}$  e siccome sappiamo anche che  $x \in C$ , per definizione di differenza abbiamo che  $x \in (C - B)$ . Quindi, per definizione di unione,  $x \in (C \cap A) \cup (C - B)$ .

Dimostriamo che  $(A \cup \overline{B}) \cap C \supseteq (C \cap A) \cup (C - B)$ .

Sia  $y \in (C \cap A) \cup (C - B)$ . Per definizione di unione abbiamo due possibilità: (1)  $y \in (C \cap A)$  oppure (2)  $y \in (C - B)$ . Consideriamo i due casi separatamente. In entrambi i casi vorremmo concludere che  $y \in ((A \cup \overline{B}) \cap C)$ .

1. Se  $y \in (C \cap A)$ , per definizione di intersezione, si ha che  $y \in C$  e  $y \in A$ . Da  $y \in A$ , per definizione di unione,  $y \in (A \cup \overline{B})$  e siccome  $y \in C$  si ha anche  $y \in ((A \cup \overline{B}) \cap C)$ .

2. Se  $y \in (C - B)$ , allora vuol dire che  $y \in C$  e  $y \notin B$  (ovvero  $y \in \overline{B}$ ). Da  $y \in \overline{B}$ , per definizione di unione,  $y \in (A \cup \overline{B})$ , e siccome  $y \in C$  si ha anche  $y \in ((A \cup \overline{B}) \cap C)$ .

**[Esercizio 3]**

Si determini se le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili e si dica quali formule sono equivalenti tra loro, giustificando le risposte:

1.  $P \rightarrow (Q \oplus R)$
2.  $(P \wedge (R \rightarrow Q)) \rightarrow Q \wedge \neg R$
3.  $(P \vee Q) \oplus R$

**Svolgimento**

Verifichiamo prima eventuali equivalenze tra formule, poi mostriamo che sono tutte soddisfacibili.

$$\begin{aligned} P \rightarrow (Q \oplus R) &\equiv \neg P \vee (Q \oplus R) \quad (\text{implic.}) \\ &\equiv \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R) \quad (\text{xor}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P \wedge (R \rightarrow Q)) \rightarrow (Q \wedge \neg R) &\equiv (P \wedge (\neg R \vee Q)) \rightarrow (Q \wedge \neg R) \quad (\text{implic.}) \\ &\equiv \neg(P \wedge (\neg R \vee Q)) \vee (Q \wedge \neg R) \quad (\text{implic.}) \\ &\equiv (\neg P \vee \neg(\neg R \vee Q)) \vee (Q \wedge \neg R) \quad (\text{de morgan}) \\ &\equiv \neg P \vee (\neg(\neg R) \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \quad (\text{de morgan}) \\ &\equiv \neg P \vee (R \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \quad (\text{doppia neg.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P \vee Q) \oplus R &\equiv ((P \vee Q) \wedge \neg R) \vee (\neg(P \vee Q) \wedge R) \quad (\text{xor}) \\ &\equiv (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg(P \vee Q) \wedge R) \quad (\text{distrib.}) \\ &\equiv (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \quad (\text{de morgan}) \end{aligned}$$

Adesso è evidente che la 1 e la 2 sono equivalenti.

Per mostrare che la 3 non è equivalente alle altre basta trovare una interpretazione che renda falsa la 3 ma non la 1, o viceversa. Sia  $\rho : \{P, Q, R\} \rightarrow \{0, 1\}$  definita come  $\rho(P) = \rho(Q) = \rho(R) = 0$ . Si ha  $\rho \models P$  e quindi  $\rho \models P \rightarrow (Q \oplus R)$ . Invece  $\rho \not\models (P \vee Q)$  e  $\rho \not\models R$ , da cui  $\rho \not\models (P \vee Q) \oplus R$ , come volevamo.

La  $\rho$  usata mostra anche che la 1 e la 2 non sono contraddizioni e che la 3 non è una tautologia.

Per mostrare che la 1 e la 2 non sono tautologie dobbiamo fornire una interpretazione  $\rho'$  che le renda false. Siccome la 1 è un'implicazione, affinché  $\rho' \not\models P \rightarrow (Q \oplus R)$  bisogna che  $\rho'$  renda vera la premessa ( $\rho' \models P$ ) e falsa la conclusione ( $\rho' \not\models (Q \oplus R)$ ). Quindi, se prendiamo, ad esempio,  $\rho'(P) = 1$  e  $\rho'(Q) = \rho'(R) = 0$  abbiamo che  $\rho' \not\models P \rightarrow (Q \oplus R)$ , come volevamo.

Per mostrare che la 3 non è una contraddizione dobbiamo fornire una interpretazione  $\rho''$  che la renda vera. A questo fine, possiamo prendere, ad esempio, una interpretazione  $\rho''$  che renda vera  $P \vee Q$  e falsa  $R$ . Scegliendo  $\rho'' = \rho'$  si ha  $\rho'' \models P$  e quindi  $\rho'' \models (P \vee Q)$ , mentre  $\rho'' \not\models R$ . Quindi  $\rho'' \models (P \vee Q) \oplus R$ , come volevamo.

#### [Esercizio 4]

Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti formule predicative sono vere nell'interpretazione  $\mathcal{I}$  tale che  $D_{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$ ,  $TS_{\mathcal{I}}(P) = \{(a, c), (b, a)\}$  e  $TS_{\mathcal{I}}(Q) = \{a\}$ :

1.  $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \neg \exists y Q(y)$
2.  $\forall x (\exists y P(x, y) \rightarrow \neg Q(x))$

#### Svolgimento

La prima formula è vera nell'interpretazione  $\mathcal{I}$ . Infatti, l'implicazione  $(\exists x \forall y P(x, y)) \rightarrow \neg \exists y Q(y)$  è sicuramente vera quando la premessa è falsa.

Per mostrare che la premessa è falsa, cioè che  $\mathcal{I} \not\models \exists x \forall y P(x, y)$ , bisogna mostrare che per ogni valore  $v \in \{a, b, c\}$  si ha  $\mathcal{I} \not\models \forall y P(v, y)$ , cioè che: (1)  $\mathcal{I} \not\models \forall y P(a, y)$ , (2)  $\mathcal{I} \not\models \forall y P(b, y)$  e (3)  $\mathcal{I} \not\models \forall y P(c, y)$ .

Nel primo caso, infatti  $\mathcal{I} \not\models P(a, b)$ .

Nel secondo caso, notiamo che  $\mathcal{I} \not\models P(b, b)$ .

Nel terzo caso notiamo che  $\mathcal{I} \not\models P(c, a)$ .

Quindi la premessa dell'implicazione è falsa e dunque la formula  $(\exists x \forall y P(x, y)) \rightarrow \neg \exists y Q(y)$  è vera.

La seconda formula è valida nell'interpretazione  $\mathcal{I}$  se possiamo dimostrare che: (1)  $\mathcal{I} \models \exists y P(a, y) \rightarrow \neg Q(a)$ , (2)  $\mathcal{I} \models \exists y P(b, y) \rightarrow \neg Q(b)$ , e (3)  $\mathcal{I} \models \exists y P(c, y) \rightarrow \neg Q(c)$ .

Però nel primo caso abbiamo che  $\mathcal{I} \models \exists y P(a, y)$  (basta considerare  $y = c$ ) mentre  $\mathcal{I} \not\models \neg Q(a)$  (perché  $\mathcal{I} \models Q(a)$ ), da cui  $\mathcal{I} \not\models \exists y P(a, y) \rightarrow \neg Q(a)$  e quindi questo ci basta a concludere che la formula  $\forall x (\exists y P(x, y) \rightarrow \neg Q(x))$  è falsa nell'interpretazione  $\mathcal{I}$ .

**[Esercizio 5]**

Si dimostri che tutte le formule della logica proposizionale possono essere espresse in maniera equivalente usando solo i connettivi  $\neg$  e  $\vee$ .

**Svolgimento**

Per un teorema visto a lezione sappiamo che tutte le formule della logica proposizionale possono essere espresse in maniera equivalente usando solo i connettivi  $\neg$  e  $\wedge$ .

Per dimostrare che tutte le formule della logica proposizionale possono essere espresse in maniera equivalente usando solo i connettivi  $\neg$  e  $\vee$  ci basta quindi far vedere che una qualsiasi congiunzione può essere espressa usando solo negazione e disgiunzione:

$$\begin{aligned} P \wedge Q &\equiv \neg(\neg(P \wedge Q)) \quad (\text{doppia negazione}) \\ &\equiv \neg(\neg P \vee \neg Q) \quad (\text{de morgan}) \end{aligned}$$