Corso di Laurea in Informatica Applicata

Linguaggio e Metodi della Matematica

Prova scritta del 3 Novembre 2005

[**Esercizio 1 - punti 6**]
Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita come

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{se } z < 0 \\ z & \text{se } z \geq 0 \end{cases}$$

Si risponda alle seguenti domande, giustificando la risposta:

1. f è iniettiva? f è surgettiva? f è bigettiva?
2. Cosa restituiscono $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ e $f^{-1}(4)$?

Svolgimento

f non è iniettiva perché, ad esempio, $f(-1) = f(1) = 1$.

f è surgettiva perché preso un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ si ha che $n = f(n)$.

f non è bigettiva perché non è iniettiva.

$f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(2) = \{2\}$ e $f^{-1}(4) = \{-2, 4\}$

[Esercizio 2 - punti 8]
Dimostrare in almeno due modi diversi che comunque si scelgano tre insiemi A, B e C vale la seguente uguaglianza tra insiemi, oppure fornire un controesempio:

$$\overline{(A \cap B)} \cup (B \cap C) = \overline{((A \cap B) - C)}$$

Svolgimento

I diagrammi di Eulero-Venn (qui omessi) mostrano che gli insiemi sono effettivamente uguali.

Come seconda dimostrazione scegliamo di esporre un argomento discorsivo. Per dimostrare l'uguaglianza dimostriamo separatamente le due inclusioni.

Dimostriamo che $\overline{(A \cap B)} \cup (B \cap C) \subseteq \overline{((A \cap B) - C)}$

Sia $x \in \overline{(A \cap B)} \cup (B \cap C)$, vogliamo far vedere che $x \in \overline{((A \cap B) - C)}$.

Per definizione di unione abbiamo due possibilità: (1) $x \in \overline{(A \cap B)}$ oppure (2) $x \in (B \cap C)$. Consideriamo i due casi separatamente. In entrambi i casi vorremmo concludere che $x \in \overline{((A \cap B) - C)}$.

1. Se $x \in \overline{(A \cap B)}$ vuol dire che $x \notin (A \cap B)$ e quindi $x \notin ((A \cap B) - C)$. Quindi $x \in \overline{((A \cap B) - C)}$.

2. Se $x \in (B \cap C)$, per definizione di intersezione abbiamo che $x \in B$ e $x \in C$. Da $x \in C$ segue che $x \notin ((A \cap B) - C)$. Quindi $x \in \overline{((A \cap B) - C)}$.

Dimostriamo che $\overline{(A \cap B)} \cup (B \cap C) \supseteq \overline{((A \cap B) - C)}$

Sia $y \in \overline{((A \cap B) - C)}$, vogliamo mostrare che $y \in \overline{(A \cap B)} \cup (B \cap C)$.

$y \in \overline{((A \cap B) - C)}$ significa che $y \notin ((A \cap B) - C)$. Abbiamo due possibilità: (1) $y \notin (A \cap B)$ oppure (2) $y \in (A \cap B)$ e $y \in C$. Consideriamo i due casi separatamente. In entrambi i casi vorremmo concludere che $x \in \overline{(A \cap B)} \cup (B \cap C)$.

1. Se $y \notin (A \cap B)$ allora $y \in \overline{(A \cap B)}$ e quindi $y \in \overline{(A \cap B)} \cup (B \cap C)$.

2. Se $y \in (A \cap B)$ e $y \in C$, abbiamo che $y \in A$ e $y \in B$ (per definizione di intersezione). Dato che $y \in B$ e $y \in C$ si ha $y \in (B \cap C)$ e quindi $y \in \overline{(A \cap B)} \cup (B \cap C)$.

[Esercizio 3 - punti 8]
Si determini se le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili e si dica quali formule sono equivalenti tra loro, giustificando le risposte:

1. $P \vee (Q \to R \wedge P)$
2. $(Q \wedge \neg P \to R) \wedge (Q \to P)$
3. $P \to (Q \to R)$

Svolgimento

Verifichiamo prima eventuali equivalenze tra formule, poi mostriamo che sono tutte soddisfacibili.

$$\begin{aligned} P \vee (Q \to (R \wedge P)) &\equiv P \vee \neg Q \vee (R \wedge P) \quad \text{(implic.)} \\ &\equiv \neg Q \vee P \vee (R \wedge P) \quad \text{(commut.)} \\ &\equiv \neg Q \vee P \quad \text{(assorb.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((Q \wedge \neg P) \to R) \wedge (Q \to P) &\equiv ((Q \wedge \neg P) \to R) \wedge (\neg Q \vee P) \quad \text{(implic.)} \\ &\equiv (\neg(Q \wedge \neg P) \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \quad \text{(implic.)} \\ &\equiv (\neg Q \vee \neg(\neg P) \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \quad \text{(de morgan)} \\ &\equiv (\neg Q \vee P \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \quad \text{(doppia neg.)} \\ &\equiv \neg Q \vee P \quad \text{(assorb.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \to (Q \to R) &\equiv P \to (\neg Q \vee R) \quad \text{(implic.)} \\ &\equiv \neg P \vee \neg Q \vee R \quad \text{(implic.)} \end{aligned}$$

Adesso è evidente che la 1 e la 2 sono equivalenti.

Per mostrare che la 3 non è equivalente alle altre basta trovare una interpretazione che renda falsa la 3 ma non la 1, o viceversa. Sia $\rho : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ definita come $\rho(P) = \rho(Q) = 1$ e $\rho(R) = 0$. Si ha $\rho \models \neg Q \vee P$ (perché $\rho \models P$) e $\rho \not\models \neg P \vee \neg Q \vee R$ (perché $\rho \not\models \neg P$, $\rho \not\models \neg Q$ e $\rho \not\models R$) come volevamo.

La ρ usata mostra anche che la 1 e la 2 non sono contraddizioni e che la 3 non è una tautologia.

Per mostrare che la 1 e la 2 non sono tautologie dobbiamo fornire una interpretazione ρ' che le renda false. A questo fine possiamo prendere qualsiasi interpretazione che renda falsa $\neg Q \vee P$. Scegliendo ad esempio $\rho'(P) = 0$ e $\rho'(Q) = \rho'(R) = 1$ si ha $\rho' \not\models P \vee (Q \to (R \wedge P))$.

Per mostrare che la 3 non è una contraddizione dobbiamo fornire una interpretazione ρ'' che la renda vera. A questo fine, essendo la 3 un'implicazione, possiamo prendere qualsiasi interpretazione che ne renda falsa la premessa P. Scegliendo ad esempio $\rho'' = \rho'$ si ha $\rho'' \models P \to (Q \to R)$.

[Esercizio 4 - punti 8]
Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti formule predicative sono vere nell'interpretazione $\mathcal{I}$ tale che $D_{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$, $TS_{\mathcal{I}}(P) = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ e $TS_{\mathcal{I}}(Q) = \{c\}$:

1. $\forall y \exists x P(x, y) \to \forall x Q(x)$
2. $\forall x (Q(x) \to \exists y P(x, y))$

Svolgimento

La prima formula è vera nell'interpretazione $\mathcal{I}$. Infatti, l'implicazione $(\forall y \exists x P(x, y)) \to (\forall x Q(x))$ è sicuramente vera quando la premessa è falsa.

Per mostrare che $\mathcal{I} \not\models (\forall y \exists x P(x, y))$ basta trovare un valore $v \in \{a, b, c\}$ tale che $\mathcal{I} \not\models \exists x P(x, v))$. L'elemento a soddisfa questo requisito, dato che $\mathcal{I} \not\models P(a, a)$, $\mathcal{I} \not\models P(b, a)$ e $\mathcal{I} \not\models P(c, a)$.

La seconda formula è falsa nell'interpretazione $\mathcal{I}$. Infatti, affinché la formula $\mathcal{I} \not\models \forall x (Q(x) \to \exists y P(x, y))$ basta trovare un valore v tale che $\mathcal{I} \not\models Q(v) \to \exists y P(v, y)$. L'implicazione $Q(v) \to \exists y P(v, y)$ è falsa solo quando la premessa $Q(v)$ è vera e la conclusione $\exists y P(v, y)$ è falsa. L'unico elemento che rende vera $Q(v)$ è c ($\mathcal{I} \models Q(c)$). Resta da controllare che $\mathcal{I} \not\models \exists y P(c, y)$, e infatti il truth set di P con contiene coppie la cui prima componente sia c.