

Linguaggio e Metodi della Matematica

Prova scritta del 3 Novembre 2005

[Esercizio 1 - punti 6]

Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definita come

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{se } z < 0 \\ z & \text{se } z \geq 0 \end{cases}$$

Si risponda alle seguenti domande, giustificando la risposta:

1. f è iniettiva? f è surgettiva? f è bigettiva?
2. Cosa restituiscono $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ e $f^{-1}(4)$?

[Esercizio 2 - punti 8]

Dimostrare in almeno due modi diversi che comunque si scelgano tre insiemi A , B e C vale la seguente uguaglianza tra insiemi, oppure fornire un controesempio:

$$\overline{(A \cap B)} \cup (B \cap C) = \overline{((A \cap B) - C)}$$

[Esercizio 3 - punti 8]

Si determini se le seguenti formule sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili e si dica quali formule sono equivalenti tra loro, giustificando le risposte:

1. $P \vee (Q \rightarrow R \wedge P)$
2. $(Q \wedge \neg P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow P)$
3. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

[Esercizio 4 - punti 8]

Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti formule predicative sono vere nell'interpretazione \mathcal{I} tale che $D_{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$, $TS_{\mathcal{I}}(P) = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ e $TS_{\mathcal{I}}(Q) = \{c\}$:

1. $\forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \forall x Q(x)$
2. $\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y P(x, y))$