INSIEMI e FUNZIONI

In questo capitolo introduciamo due concetti di base della matematica, gli *insiemi* e le *funzioni*.

1 Insiemi

Definiamo gli insiemi in maniera intuitiva.

Definizione 1.1 (Insieme) *Un* insieme *è una collezione di oggetti, detti* elementi.

Usiamo la notazione $a \in A$ (resp. $a \notin A$) per dire che a è un elemento dell'insieme A (resp. che a non è un elemento dell'insieme A).

Gli insiemi si usano per raggruppare oggetti. Il modo più semplice di descrivere un insieme consiste nell'elencare esplicitamente i suoi elementi, utilizzando i simboli , e le parentesi $\{, \}$. Per esempio, $V = \{a, e, i, o, u\}$ descrive l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano. Anche nel caso di insiemi infiniti si può usare la stessa notazione. Per esempio l'insieme ben noto dei numeri naturali si può indicare come

$$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Gli insiemi possono contenere oggetti simili ma anche oggetti di diversa natura, come per esempio in $A = \{a, 1, b, 9\}$.

Un caso particolare di insieme è l'insieme che non ha elementi, l'insieme vuoto, indicato con $\emptyset$ o $\{\}$.

Quando gli elementi di un insieme sono caratterizzati da una proprietà particolare è però conveniente descriverlo tramite tale proprietà utilizzando la notazione

$$A = \{a \mid \ \mathcal{P}(a)\}$$

$$A = \{a \in X \mid \ \mathcal{P}(a)\}$$

dove X è un insieme (o dove si sottointende l'universo U degli elementi) e $\mathcal{P}$ è la proprietà che carattezrizza gli elementi. Per esempio l'insieme dei numeri naturali pari $\mathcal{N}_P$ si può formalizzare come

$$\mathcal{N}_P = \{x \mid x \in \mathcal{N} \text{ ed } x \ \text{ è divisibile per } \ 2\} = \{x \in \mathcal{N} \mid x \ \text{ è divisibile per } \ 2\}.$$

Nota 1.2 *In realtà la definizione del concetto insieme è molto complessa. Il problema è quello di dire che A è un insieme se e solo se si può stabilire per ogni elemento a dell'universo, se $a \in A$ o $a \notin A$. Senza un concetto preciso* *di elemento però questa proprietà banale produce dei paradossi, contraddizioni. Una trattazione approfondita dell'assiomatizzazione degli insiemi che evita tali paradossi esula dagli obiettivi del corso. Considereremo quindi la definizione intuitiva data sopra.*

Cominciamo a dare alcune definizioni di base, in particolare il concetto di sottoinsieme.

Definizione 1.3 *Siano A e B due insiemi. Diciamo che*

- *A è* uguale *a B ($A = B$) sse hanno gli stessi elementi;*
- *A è un* sottoinsieme *di B ($A \subseteq B$) sse ogni elemento di A è elemento di B.*

Per esempio, dato che l'ordine degli elementi non conta

$$V = \{a, e, i, o, u\} = \{o, u, i, a, e\} = \{x \mid x \text{ è una vocale dell'alfabeto}\}.$$

Sottoinsiemi di V sono per esempio $\{a, e\}, \{a\}, \{a, e, i, o, u\}, \emptyset$. Un caso particolare di sottoinsiemi sono i sottoinsiemi *propri*. Diciamo che A è un sottoinsieme proprio di B ($A \subset B$) sse $A \subseteq B$ e non $A = B$. Per esempio

$$\{a, e\} \subset V \text{ e } \{a, e, i, o, u\} \not\subset V.$$

Notate che, dato che $\emptyset$ non ha elementi, abbiamo (dalla Def. 1.3) per ogni insieme A,

$$\emptyset \subseteq A \text{ e } A \subseteq A.$$

Vediamo ora alcune proprietà fondamentali dell'inclusione tra insiemi.

Proposizione 1.4 *Siano A e B due insiemi. Si ha:*

- *$A = B$ sse $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$;*
- *se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$.*

Prova: *Segue banalmente dalla Def. 1.3.* $\square$

Si possono anche definire insiemi che hanno come elementi insiemi. Per esempio l'insieme

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}$$

ha come elementi gli insiemi $\{a\}$ e $\{a, b\}$. Notate che,

$$\{a\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\} \text{ e } a \notin \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Definizione 1.5 (Insieme delle parti) *Sia A un insieme. L'*insieme delle parti *di A, detto $\wp(A)$, è l'insieme che ha come elementi i sottoinsiemi di A, ovvero*

$$\wp(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Per esempio, dato $A = \{a, b, c\}$ abbiamo

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Qual'e' l'insieme delle parti dell'insieme vuoto? Dato che $\emptyset$ ha un solo sottoinsieme che è $\emptyset$, si ha $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Nota che $\{\emptyset\} \neq \emptyset$, dato che $\emptyset$ non ha elementi e $\{\emptyset\}$ ha come elemento $\emptyset$.

Introduciamo le principali operazioni su insiemi. Una coppia ordinata che ha come primo elemento a e come secondo elemento b si indica con (a, b). Si ha $(a, b) \neq (b, a)$ a meno che $a = b$. La stessa notazione si usa per le ennuple $(a_1, \ldots, a_n)$.

Definizione 1.6 (Prodotto Cartesiano) *Siano A e B insiemi. Il* prodotto cartesiano *di A e B ($A \times B$) è l'insieme che ha come elementi le coppie ordinate (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$, ovvero*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Per esempio, dati $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$, abbiamo

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Notate che $A \times B \neq B \times A$. Questo vuol dire che l'operazione di prodotto cartesiano non è una operazione commutativa, ovvero che il risultato dipende dall'ordine.

La nozione di prodotto cartesiano si estende banalmente al caso di più insiemi. Dati n insiemi $A_1, \ldots, A_n$, abbiamo

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ per ogni } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Un caso particolare di prodotto cartesiano si ha quando $A_i = A$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. In tal caso si usa la notazione A^n per indicare $A_1 \times \ldots \times A_n$.

Definizione 1.7 (Unione, Intersezione, Differenza) *Siano A e B due insiemi. Definiamo*

- *l'*unione *di A e B ($A \cup B$) è l'insieme degli oggetti che sono elementi o di A o di B,*

  $$A \cup B = \{c \mid c \in A \text{ o } c \in B\};$$

- *l'*intersezione *di A e B ($A \cap B$) è l'insieme degli oggetti che sono elementi sia di A che di B,*

  $$A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ e } c \in B\};$$

- *la* differenza *di A e B ($A - B$) è l'insieme degli oggetti che sono elementi di A e non sono elementi di B,*

  $$A - B = \{c \mid c \in A \text{ e } c \notin B\};$$

Quando $B \subseteq A$, l'insieme $A - B$ si dice *complemento* di B rispetto ad A. Il complemento di B rispetto ad A si denota con $\overline{B}$, qualora l'insieme A sia chiaro dal contesto, ovvero quando A è l'universo degli elementi. Per esempio se B è l'insieme dei naturali pari, allora $\overline{B}$ sarà l' insieme dei naturali dispari.

Consideriamo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, d\}$. Abbiamo

$$A \cup B = B \cup A = \{a, b, c, d\}$$

$$A \cap B = B \cap A = \{a\}$$

$$A - B = \{b, c\}$$

$$B - A = \{d\}$$

Quando $A \cap B = \emptyset$, A e B si dicono disgiunti. Per esempio l'insieme dei numeri interi negativi $\{x \in \mathcal{Z} \mid x < 0\}$ ed l'insieme dei naturali $\mathcal{N}$ sono insiemi disgiunti.

Le operazioni di unione, intersezione e differenza tra insiemi soddisfano alcune proprietà notevoli.

Teorema 1.8 *Siano A, B e C insiemi. Si ha*

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	*idempotenza*
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	*commutatività*
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	*associatività*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	*distributività*

Il Teorema 1.8 afferma che, dati tre insiemi qualsiasi A, B e C valgono delle uguaglianze. Come facciamo a dare una giustificazione della validità di questa affermazione? Alcune proprietà, in particolare l'associatività e la distributività, sono non banali. È quindi necessario giustificare in modo formale queste affermazioni, ovvero darne una *prova* o *dimostrazione*. Notiamo subito che è necessario fare un ragionamento generale ovvero indipendente da come sono fatti gli insiemi A, B e C. Trovare tre insiemi per cui vale la proprietà non è sufficiente, in quanto potrebbero essercene altri per cui non vale. Per esempio considerate la seguente affermazione. Dati due insiemi A e B abbiamo

$$A \cup B = A \cap B.$$

Possiamo mostrare due insiemi per cui è vera e due insiemi per cui non è vera. Per esempio, per $A = \{1\}$ e $B = \{1\}$ allora è vera; mentre per $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1\}$ non è vera. Questo significa ovviamente che l'affermazione non è valida.

Una *prova* per esempio della proprietá distributiva potrebbe essere la seguente.

Prova: Mostriamo come caso esemplificativo che $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dobbiamo fare vedere che i due insiemi hanno gli stessi elementi, ovvero che: se $a \in A \cup (B \cap C)$ allora $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e che se $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ allora $a \in A \cup (B \cap C)$. In altre parole dobbiamo fare che valgono sia $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ che $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. Utilizziamo le definizioni di unione ed intersezione (Def. 1.7).

$(A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C))$ Consideriamo un elemento a tale che $a \in A \cup (B \cap C)$. Dalla definizione di unione sappiamo che vale uno dei seguenti casi: (i) $a \in A$ o (ii) $a \in (B \cap C)$. Facciamo quindi vedere che in entrambi i casi possiamo concludere che $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Quando vale (i) ($a \in A$) abbiamo anche $a \in (A \cup B)$ e $a \in (A \cup C)$. Quindi dalla definizione di intersezione concludiamo $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Quando vale (ii) ($a \in (B \cap C)$) abbiamo $a \in B$ e $a \in C$ dalla definizione di intersezione. Inoltre $a \in B$ implica $a \in (A \cup B)$ e $a \in (A \cup C)$. Quindi dalla definizione di intersezione concludiamo $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$((A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C))$ Consideriamo un elemento a tale che $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dalla definizione di intersezione sappiamo che valgono sia $a \in (A \cup B)$ che $a \in (A \cup C)$. Da $a \in (A \cup B)$ deduciamo che $a \in A$ o $a \in B$; analogamente da $a \in (A \cup C)$ deduciamo che $a \in A$ o $a \in C$. Vuol dire che ci sono due possibilità: (i) $a \in A$ o (ii) $a \in B$ e $a \in C$. Dalla definizione di unione e intersezione concludiamo $a \in A \cup (B \cap C)$.

$\square$

La prova del Teorema 1.8 è piuttosto complessa. Questo perchè è difficile : (i) interpretare correttamente le affermazioni matematiche scritte nel linguaggio naturale (possono essere ambigue), (ii) individuare dei passaggi logici corretti che portino dalle ipotesi di partenza alla conclusioni. Nel seguito del corso introdurremo la *Logica Matematica* come strumento per sviluppare dimostrazioni corrette. Vedremo che la dimostrazione sarà ottenibile in modo banale utilizzando semplici passaggi logici ben noti.

Le proprietà del Teorema 1.8 sono interessanti perchè permettono di semplificare il calcolo di operazioni tra insiemi complesse. Per esempio possiamo fare vedere che

$$A \cup (A \cap C) = A \cap (A \cup C)$$

utilizzando le proprietà del Teorema 1.8 per sostituire insiemi uguali.

Dalla proprietà distributiva abbiamo

$$A \cup (A \cap C) = (A \cup A) \cap (A \cup C)$$

Inoltre dalla proprietà di idempotenza abbiamo

$$(A \cup A) \cap (A \cup C) = A \cap (A \cup C).$$

Teorema 1.9 *Siano A e B insiemi. Si ha*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Prova: Per esercizio.

$\square$

Le operazioni di unione ed intersezione si possono estendere a famiglie di insiemi. Una famiglia di insiemi, $\{A_i\}_{i \in I}$, è cosituita da un insieme I e da un insieme A_i per ogni $i \in I$. Definiamo

- $\bigcup_{i \in I} A_i$ l'insieme degli oggetti che sono elementi di A_i per qualche $i \in I$;
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ l'insieme degli oggetti che sono elementi di A_i per ogni $i \in I$.

Un caso particolare di famiglia di insiemi si ha quando $I = \{1, \ldots, n\}$ per un n fissato. In tal caso $\bigcup_{i \in I} A_i$ e $\bigcap_{i \in I} A_i$ sono indicati rispettivamente con $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

2 Funzioni

Una funzione è una operazione che associa ad un elemento di un insieme un elemento di un altro insieme.

Definizione 2.1 (Funzioni) *Siano A e B due insiemi. Una* funzione f *da A a B è un assegnamento di esattamente un elemento di B ad ogni elemento di A.*

Il fatto che $b \in B$ sia l'elemento assegnato ad $a \in A$ da f si indica con $f(a) = b$. Inoltre si usa la notazione $f : A \to B$ per indicare una funzione f da A a B, e si chiamano A e B rispettivamente il *dominio* e *codominio* della funzione.

Esempio 2.2 *Consideriamo gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$. La seguente specifica descrive una funzione $f : A \to B$*

$$f(a) = 1 \text{ e } f(b) = 1 \text{ e } f(c) = 2.$$

Analogamente la seguente specifica descrive una funzione $g : A \to B$

$$g(a) = 1 \text{ e } g(b) = 1 \text{ e } g(c) = 1.$$

Invece la specifica

$$h(a) = 1 \text{ e } h(b) = 1$$

non corrisponde ad una funzione dato che l'elemento c del dominio non è associato ad alcun elemento del codominio [1].

[1] Questo caso corrisponde ad una *funzione parziale* che può essere indefinita per qualche elemento del dominio.

Comunemente le funzioni sono specificate da espressioni del tipo $f(x) = e$ dove e è una espressione il cui valore dipende dal valore assegnato alla variabile x. Per esempio $f(x) = x$ è la funzione identità, $f(x) = x + 1$ ed $f(x) = x^2$ sono le funzioni che riportano per ogni valore la somma ed il quadrato.

Data una funzione $f : A \to B$ definiamo l'*immagine* di f come

$$Im(f) = \{b \in B \mid \ f(a) = b \text{ per qualche } a \in A\}.$$

Esempio 2.3 *Consideriamo le funzioni f e g dell'Esempio 2.2. Abbiamo*

$$Im(f) = B \text{ e } Im(g) = \{1\}.$$

Esempio 2.4 *Consideriamo la funzione $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ tale che $f(x) = x^2$. Allora $Im(f) = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$ ovvero il sottoinsieme di $\mathcal{Z}$ formato dagli elementi che sono quadrati di qualche intero.*

Definizione 2.5 (Iniettività, Surgettività) *Una funzione $f : A \to B$ è detta*

- iniettiva *sse, per ogni $a, b \in A$, se $f(a) = f(b)$ allora $a = b$;*
- surgettiva *sse $Im(f) = B$;*
- bigettiva *sse è iniettiva e surgettiva.*

Una definizione *equivalente* è:

- *iniettiva* sse se $a \neq b$ allora $f(a) \neq f(b)$;
- *surgettiva* sse per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Vediamo alcuni esempi. Siano $f : A \to B$ e $g : A \to B$ le funzioni definite nell'Esempio 2.2. La funzione f è surgettiva ma non è iniettiva. *Controesempio*: $f(a) = f(b) = 1$. La funzione g non è iniettiva e non è surgettiva. *Controesempio*: $2 \in B$ non è immagine di alcun elemento del dominio.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ dell'Esempio 2.4. Tale funzione non è surgettiva nè iniettiva. *Controesempio* alla surgettività: non esiste alcun $n \in \mathcal{Z}$ tale che $n^2 = -1$. *Controesempio* alla iniettività: $f(1) = f(-1) = 1$.

Esempio 2.6 *Consideriamo $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ tale che $f(x) = x + 1$. Tale funzione è bigettiva. Infatti se $n \neq m$ allora $n + 1 \neq m + 1$ (iniettiva). Inoltre per ogni $n \in \mathcal{Z}$ esiste m tale che $f(m) = n$, cioè $m + 1 = n$ (surgettiva). Basta prendere $m = n - 1$.*

Come suggerito dall'esempio le funzioni bigettive specificano una corrispondenza *uno ad uno* tra gli elementi del dominio e del codominio. Questa corrispondenza può anche essere invertita.

Definizione 2.7 *Sia $f : A \to B$ una funzione bigettiva. La funzione inversa di f, detta f^{-1}, è la funzione $f^{-1} : B \to A$ che associa ad ogni $b \in B$ l'elemento a di A tale che $f(a) = b$, ovvero tale che $f^{-1}(b) = a$ se $f(a) = b$.*

Consideriamo per esempio la funzione $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ tale che $f(x) = x + 1$ dell'Esempio 2.6. Abbiamo $f^{-1}(x) = x - 1$. Notate che sia la iniettività che la surgettività sono condizioni necessarie alla definizione della funzione inversa.

Definizione 2.8 *Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due funzioni. Definiamo la composizione di f e g, detta $g \circ f$, come la funzione $g \circ f : A \rightarrow C$ tale che*

$$g \circ f(a) = g(f(a)).$$

Esempio 2.9 *Consideriamo le funzioni $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ e $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$, dove $f(x) = x + 1$ ed $g(y) = 2y + 2$. Abbiamo*

$$g \circ f(z) = g(f(z)) = g(z + 1) = 2(z + 1) + 2 = 2z + 4$$

$$f \circ g(z) = f(g(z)) = f(2z + 2) = (2z + 2) + 1 = 2z + 3.$$

L'Esempio 2.8 mostra che è possibile $g \circ f \neq f \circ g$, ovvero che la composizione di funzioni non è commutativa. Invece la composizione di funzioni preserva la proprietà surgettiva e la proprietà iniettiva e, di conseguenza, la proprietà bigettiva.

Teorema 2.10 *Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due funzioni iniettive (resp. surgettive). Allora $g \circ f$ è iniettiva (resp. surgettiva).*

Prova: Facciamo vedere il caso della proprieà iniettiva. Mostriamo quindi che la premessa (f e g sono iniettive) implica la conclusione ($g \circ f$) è iniettiva. Dalla Def. di iniettività (vedi Def. 2.5) bisogna mostrare che se $a \neq b$ allora $g \circ f(a) \neq g \circ f(b)$. Per definizione di $\circ$ abbiamo $g \circ f(a) = g(f(a))$ e $g \circ f(b) = g(f(b))$. Dato che $a \neq b$ e che f è iniettiva abbiamo $f(a) \neq f(b)$. Dato che $f(a) \neq f(b)$ e che g è iniettiva abbiamo quindi $g(f(a)) \neq g(f(b))$.

□

Teorema 2.11 *Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione bigettiva. Si ha*

- $f^{-1} \circ f = id_A$ *e* $f \circ f^{-1} = id_B$,
- $(f^{-1})^{-1} = f$,

dove $id_X : X \rightarrow X$ è la funzione identità sul dominio X.

Prova: Per esercizio. □

Riferimenti del Capitolo: Rosen [1] Sezioni 1.4, 1.5 e 1.6.

References

[1] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and its Applications.* McGraw-Hill International Editions, 1999.

[2] Daniel J. Velleman *How to Prove it.* Cambridge University Press, 1998.