CALCOLO COMBINATORIO

In questo capitolo introduciamo le regole di base del *calcolo combinatorio*, ovvero di quella parte della matematica discreta che studia metodi e tecniche per contare gli oggetti che possiedono certe proprietà. Questa capacità è necessaria per risolvere problemi in molti contesti matematici ed informatici, innanzitutto per valutare la complessità degli algoritmi.

1 Cardinalità

Introduciamo innanzitutto il concetto di cardinalità (o dimensione) di un insieme.

Definizione 1.1 *Siano A e b due insiemi. Diciamo che A e B sono* equipotenti *sse esiste una funzione biunivoca $f : A \to B$.*

Due insiemi sono quindi equipotenti se esiste una corrispondenza uno ad uno tra i loro elementi. Per contare il numero di elementi di un insieme infinito è sufficiente stabilire una biezione con un sottoinsieme di $\mathcal{N}$ tale che $\{1, \ldots, n\}$.

Definizione 1.2 *Sia A un insieme finito. La cardinalità di A è uguale ad n ($|A| = n$) per $n \in \mathcal{N}$ sse esiste una biezione $f : A \to \{1, \ldots, n\}$.*

Il seguente teorema formalizza l'idea intuitiva che due insiemi equipotenti hanno lo stesso numero di elementi. Il teorema fornisce anche un modo conveniente per determinare la cardinalità di un insieme: trovare una corrispondenza tra gli elementi dell'insieme e gli elementi di un altro insieme la cui cardinalità è nota. Come vedremo in seguito questo approccio si rivelerà essenziale per trattare la cardinalità di insiemi infiniti.

Teorema 1.3 *Siano A e B due insiemi finiti e sia $f : A \to B$ una biezione. Si ha $|A| = |B|$.*

Prova: Supponiamo che $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e che $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Mostriamo che $|A| \leq |B|$. Consideriamo l'insieme $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\} \subseteq B$. Dato che la funzione è iniettiva, abbiamo $f(a_i) \neq f(a_j)$ per ogni $i \neq j$. Quindi

$$|\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}| = n.$$

Dato che $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\} \subseteq B$ vuol dire che B ha almeno n elementi.

Mostriamo che $|A| \geq |B|$. Dato che f è surgettiva per ogni b_j esiste a_i (denotato con $f^{-1}(b_j)$) tale che $f(a_i) = b_j$. Consideriamo l'insieme $\{f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_k)\} \subseteq A$. Dato che f è iniettiva $f^{-1}(b_i) \neq f^{-1}(b_j)$ se $i \neq j$. Quindi

$$|\{f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_k)\}| = k.$$

Siccome $\{f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_k)\} \subseteq A$, allora A ha almeno k elementi.

□

2 Regola della Somma e del Prodotto

Le regole base del calcolo combinatorio sono basate sulle seguenti proprietà per determinare la cardinalità di insiemi finiti.

Teorema 2.1 (Regola della Somma) *Siano $A_1, \ldots, A_n$ insiemi finiti disgiunti ($A_i \cap A_j = \emptyset$). Abbiamo*

$$|\bigcup_{i \in \{1,n\}} A_i| = \sum_{i \in \{1,n\}} |A_i|.$$

Teorema 2.2 (Regola del Prodotto) *Siano $A_1, \ldots, A_n$ insiemi finiti. Abbiamo*

$$|\prod_{i \in \{1,n\}} A_i| = \prod_{i \in \{1,n\}} |A_i|.$$

Non daremo una dimostrazione formale dei Teoremi 2.1 e 2.2. In entrambi i casi la prova procede per induzione su n. Nel caso base bisogna mostrare che

$$|A \cup B| = |A| + |B| \qquad \text{Teorema 2.1}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B| \qquad \text{Teorema 2.2}$$

Notiamo che $|A \cup B| = |A| + |B|$ segue banalmente dal fatto che $A \cap B = \emptyset$. Invece per mostrare che $|A \times B| = |A| \times |B|$ bisogna fare una costruzione più complicata. Costruiamo una tabella che rappresenta la corrispondenza uno ad uno. La tabella ha righe che corrispondono gli elementi di $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e colonne che corrispondono gli elementi di $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Le caselle rappresentano tutte e sole le coppie del prodotto cartesiano $A \times B$ [1]. Dato che il numero di caselle diverse è $n \times k$ (l'area del rettangolo) vuol dire (formalmente dal Teorema 1.3) che l'insieme delle coppie ha cardinalità $n \times k$.

	b_1	$\ldots$	b_k
a_1	(a_1, b_1)	$\ldots$	(a_1, b_k)
$\ldots$	$\ldots$		
$\ldots$	$\ldots$		
a_n	(a_k, b_1)	$\ldots$	(a_n, b_k)

[1] La tabella definisce di fatto una biezione!

Andiamo quindi a vedere alcuni semplici esempi di applicazione dei Teoremi 2.2 e 2.1. I problemi si risolvono capendo in quanti modi è possibile *scegliere* degli oggetti da un insieme.

Esempio 2.3 *Supponiamo che uno studente debba scegliere un progetto da tre liste di progetti distinti* L_1,L_2 *ed* L_3. *Quanti progetti diversi può scegliere? Dalla Regola della Somma ci sono* $|L_1| + |L_2| + |L_3|$ *scelte diverse.*

Esempio 2.4 (Stringhe Binarie) *Una stringa binaria è una sequenza di simboli* $\{0,1\}$. *Indichiamo con* $B_n = \{b_1 \ldots b_n \mid b_i \in \{0,1\}\}$ *l'insieme delle stringhe binarie lunghe* n. *Quante sono le stringhe binarie lunghe* n *(qual'è* $|B_n|$*)? La cardinalità di* B_n *si può determinare in modo semplice in base alla Regola del Prodotto. Consideriamo la funzione* $f : B_n \to \{0,1\}^n$ *tale che* $f(b_1 \ldots b_n) = (b_1, \ldots, b_n)$ *che è ovviamente una biezione. Quindi* $|B_n| = |\{0,1\}^n| = 2^n$.

Il risultato dell'Esempio 2.9 è interessante. Ci permette infatti di determinare direttamente la cardinalità di $\wp(A)$ utilizzando il Teorema 1.3.

Esempio 2.5 (Stringhe Binarie ed Insieme delle Parti) *Sia* A *un insieme tale che* $|A| = n$ *con* $n \in \mathcal{N}$. *Facciamo vedere che* $|B_n| = |\wp(A)| = 2^n$. *Dal Teorema 1.3 sappiamo che è sufficiente trovare una funzione biunivoca tale che*

$$f : \wp(A) \to B_n.$$

Dato che $|A| = n$ *sappiamo che* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. *Definiamo* $f : \wp(A) \to B_n$ *come la funzione tale che, per ogni* $X \in \wp(A)$, $f(X) = b_1 \ldots b_n$, *dove per ogni* $i \in \{1, n\}$ *si ha*

$$b_i = \begin{cases} 1 & se\ i \in X \\ \\ 0 & se\ i \notin X \end{cases}$$

La funzione f, *nota anche come funzione caratteristica di* A, *costruisce una stringa in cui ad ogni posizione* i *appare* 1 *se l'elemento è contenuto nell'insieme, e* 0 *altrimenti. Per esempio abbiamo* $f(\{2,4\}) = 0101$ *ed* $f(\{1,4\}) = 1001$.

Mostriamo che la funzione f *è una biezione, cioè che è iniettiva e surgettiva.*

iniettiva *La funzione* f *è iniettiva sse per ogni* $X, X' \in \wp(\{1, \ldots, n\})$ *con* $X \neq X'$ *si ha* $f(X) \neq f(X')$, *o equivalentemente (per la proprietà contrappositiva), se* $f(X) = f(X')$ *allora* $X = X'$. *Siano* $X, X' \in \wp(\{1, \ldots, n\})$ *tali che* $f(X) = f(X') = b_1 \ldots b_n$. *È ovvio che* $X = X'$ *dato che per ogni* $i \in \{1, n\}$,

$$b_i = 1 \leftrightarrow i \in X \leftrightarrow i \in X'$$

$$b_i = 0 \leftrightarrow i \notin X \leftrightarrow i \notin X'$$

Se sono uguali allora i due insiemi X *ed* X' *hanno esattamente gli stessi elementi.*

surgettiva *La funzione f è surgettiva sse per ogni $b_1 \dots b_n \in B_n$ esiste $X \in \wp(\{1,\dots,n\})$ tale che $f(X) = b_1 \dots b_n$. Consideriamo un generico $b_1 \dots b_n \in B_n$ e l'insieme*

$$X = \{i \in \{1,n\} \mid b_i = 1\}.$$

Abbiamo che $X \in \wp(\{1,\dots,n\})$ ed $f(X) = b_1 \dots b_n$.

Esempio 2.6 *Supponiamo di dovere etichettare delle sedie con una etichetta (x,y) dove x è una lettera ed y è un numero tra 1 e 20. Qualè il numero massimo di sedie che possono essere etichettate in modo distinto?*

Le etichette sono elementi del prodotto cartesiano $\mathcal{L} \times \{1,\dots,20\}$, dove $\mathcal{L}$ è l'insieme delle lettere con $|\mathcal{L}| = 21$. Dalla Regola del Prodotto segue che ci possono essere al massimo 21×20 sedie etichettate in modo distinto.

Supponiamo invece che le etichette siano coppie (x,y) dove x ed y sono un numero tra 1 e 20 o una lettera.

Allora sia per x che per y ci sono $20 + 21$ scelte possibili (Regola della Somma). Quindi dalla Regola del Prodotto otteniamo 41^2 etichette diverse.

La Regola della Somma (Teorema 2.1) permette di calcolare la cardinalità dell'unione di due o più insiemi disgiunti. La regola non è valida qualora si voglia calcolare la cardinalità dell'unione di insiemi che non sono disgiunti dato che bisogna stare attenti a non contare due volte gli elementi condivisi.

Consideriamo per esempio $A = \{1,3,6\}$ e $B = \{3,4\}$. Abbiamo $A \cup B = \{1,3,6,4\}$. Quindi $|A \cup B| = 4$ mentre $|A| + |B| = 3 + 2 = 5$. Il problema è che facendo $|A| + |B|$ abbiamo contato due volte l'elemento 3 che appartiene sia ad A che a B.
Il seguente risultato fornisce il metodo corretto per calcolare la cardinalità dell'unione a partire dalle cardinalità dei due insiemi.

Teorema 2.7 (Inclusione-Esclusione) *Siano A e B due insiemi finiti. Abbiamo $|A \cup B| = (|A| + |B|) - |A \cap B|$.*

Prova: Gli elementi di $A \cap B$ sono contati sia in $|A|$ che in $|B|$, ovvero sono contati due volte. Sottraendo $|A \cap B|$ facciamo in modo che siano contati una sola volta.

□

Il principio di inclusione-esclusione si può generalizzare all'unione di n insiemi.

Esercizio 2.8 *Supponiamo di volere contare l'insieme delle stringhe binarie lunghe 8 tali che iniziano con 1 o finiscono per 00. Siano $A = \{b_1 \dots b_8 \in B_8 \mid b_1 = 1\}$ e $C = \{b_1 \dots b_8 \in B_8 \mid b_7 = 0 \wedge b_8 = 0\}$. Abbiamo dalla Regola del Prodotto (vedi l'Esempio* **??***):*

1. $|A| = 2^7$. *Infatti* $|A| = |\{1\}| \times |\{0,1\}^7|$;
2. $|C| = 2^6$. *Infatti* $|C| = |\{0,1\}^6| \times |\{0\}^2|$.

Consideriamo $A \cap C$. *Abbiamo* $A \cap C \neq \emptyset$, *dato che per esempio* $10000000 \in A \cap C$. *Abbiamo dalla Regola del Prodotto (vedi l'Esempio* **??***):*

$$|A \cap C| = |\{1\}| \times |\{0,1\}^5| \times |\{0\}^2| = 1 \times 2^5 \times 1 = 2^5.$$

Dal Principio di inclusione-esclusione otteniamo

$$|A \cup C| = (|A| + |C|) - |A \cap C| = (2^7 + 2^6) - 2^5 = 128 + 64 - 32 = 128 + 32 = 160.$$

Esercizio 2.9 *Determinare la cardinalità delle stringhe binarie lunghe* n *tali che fissato* i, j *con* $1 \leq i \leq n$ *e* $1 \leq j \leq n$,

1. *l'elemento* i*-esimo è un* 1*;*
2. *l'elemento* i*-esimo è un* 1 *e l'elemento* j*-esimo è uno* 0*;*
3. *l'elemento* i*-esimo è un* 1 *o l'elemento* j*-esimo è uno* 0*;*
4. *contengono esattamente un* 1.

1. *Dobbiamo calcolare la cardinalità di* $A^1_{n,i} = \{b_1 \dots b_i \dots b_n \in \{0,1\}^n \mid b_i = 1\}$. *Per esempio* $10, 11 \in A^1_{2,1}$ *e* $010, 110 \in A^1_{3,2}$.

   Fissiamo n *ed* i *con* $1 \leq i \leq n$. *Abbiamo una corrispondenza tra stringhe di* $A^1_{n,i}$ *ed elementi del prodotto cartesiano* $\{0,1\}^{i-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{n-(i+1)}$. *Dalla regola del prodotto* $|A_{n,i}|^1 = 2^{n-1}$.

2. *Dobbiamo calcolare la cardinalità di* $A_{n,i,j} = \{b_1 \dots b_n \in \{0,1\}^n \mid b_i = 1 \wedge b_j = 0\}$. *Per esempio* $100 \in A_{3,1,2}$ *e* $110 \notin A_{3,1,2}$.

   Notiamo che se $i = j$ *allora* $A_{n,i,j} = \emptyset$. *Quindi consideriamo il caso in cui* $i \neq j$. *Abbiamo una corrispondenza tra stringhe di* $A_{n,i,j}$ *ed gli elementi del prodotto cartesiano* $\{0,1\}^{n-2} \times \{1\} \times \{0\}$. *Dalla regola del prodotto* $|A_{n,i,j}| = 2^{n-2}$ *se* $i \neq j$.

3. *Dobbiamo calcolare la cardinalità di* $\tilde{A}_{n,i,j} = \{b_1 \dots b_n \in \{0,1\}^n \mid b_i = 1 \vee b_j = 0\}$. *Notiamo che* $\tilde{A}_{n,i,j} = A^1_{n,i} \cup A^0_{n,j}$.

   Come si calcola la cardinalità dell'unione? Bisogna determinare se $A^1_{n,i} \cap A^0_{n,j} = \emptyset$ *o* $A^1_{n,i} \cap A^0_{n,j} \neq \emptyset$. *Dato che per esempio* $100 \in A^1_{3,1}$ *e* $100 \in A^0_{3,3}$ *vuol dire che l'unione non è disgiunta.*

   Dal Principio di inclusione-esclusione abbiamo

   $$|A^1_{n,i} \cup A^0_{n,j}| = |A^1_{n,i}| + |A^0_{n,j}| - |A^1_{n,i} \cap A^0_{n,j}|.$$

   Dato che $|A^1_{n,i}| = 2^{n-1} = |A^0_{n,j}|$ *e che* $|A^1_{n,i} \cap A^0_{n,j}| = |A_{n,i,j}| = 2^{n-2}$ *otteniamo*

   $$|A^1_{n,i} \cup A^0_{n,j}| = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 2^{n-2} \qquad \text{se } i \neq j$$

   $$|A^1_{n,i} \cup A^0_{n,j}| = 2^{n-1} + 2^{n-1} \qquad \text{se } i = j$$

4. *Dobbiamo calcolare la cardinalità di* $\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{B}_{n,i}$ *dove* $\tilde{B}_{n,i} = \{b_1 \dots b_n \mid b_i = 1 \wedge \forall j (j \neq i \rightarrow b_j \neq 1)\}$.

   Notiamo che se $b_j \neq 1$*, allora* $b_j = 0$*. Quindi* $\tilde{B}_{n,i} = \{b_1 \dots b_n \mid b_i = 1 \wedge \forall j (j \neq i \rightarrow b_j = 0)\}$*. Allora fissato 1 in posizione i tutti gli altri* b_j *devono essere* j*. Di conseguenza* $\tilde{B}_{n,i} = 1$*, per ogni* $i \in \{1, n\}$*, e* $\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{B}_{n,i} = n$.

3 Lemma dei Cassetti

Vediamo un principio fondamentale del calcolo combinatorio, noto come *Lemma dei Cassetti* (Pingenhole Principle). Il principio deriva dal seguente problema: supponiamo di volere distribuire n oggetti in k cassetti, e che ci siano più oggetti che cassetti. Qual'è un limite inferiore al numero di oggetti che stanno per lo meno in un cassetto in ogni possibile distribuzione?

La soluzione più semplice è data dalla seguente ovvia proprietà.

Teorema 3.1 (Lemma dei Cassetti) *Se* $k + 1$ *oggetti sono distribuiti in* k *cassetti, allora esiste* almeno *un cassetto che contiene* due o più *oggetti.*

Prova: Sia $f : A \rightarrow B$, dove A è l'insieme degli oggetti e B l'insieme dei cassetti. Come abbiamo visto nel Teorema 1.3 (vedi Sezione 1) se f è iniettiva, allora avremmo $|A| \leq |B|$. Dato che $|A| > |B|$ allora f non è iniettiva. Per definizione vuol dire che esistono $a_1, a_2 \in A$ tali che $a_1 \neq a_2$ ed $f(a_1) = f(a_2)$. $\square$

Il Teorema 3.1 ci permette di risolvere semplici quesiti tipo i seguenti:

1. In ogni gruppo di tre persone *almeno* due hanno lo stesso stesso;

2. In ogni gruppo di 22 parole italiane almeno due iniziano per la stessa lettera.

Un ovvio corollario è il seguente.

Corollary 3.2 *Se* n *oggetti sono distribuiti in* k *cassetti con* $n > k$*, allora esiste* almeno *un cassetto che contiene* due o più *oggetti.*

Utilizzando il Corollario 3.2 si può concludere che in ogni gruppo di 21 cifre decimali almeno due sono uguali. Infatti i cassetti, cioè le cifre decimali, sono 10!

In questo caso potremmo dire qualcosa di più: su 21 cifre decimali ce ne sono almeno 3 che sono uguali. Infatti pensiamo ad una "distribuzione uniforme" in cui i 20 oggetti vengono distribuiti nei 10 cassetti. Vuol dire che ogni cassetto contiene esattamente 2 oggetti. L'oggetto rimanente, ovunque sia messo, deve essere messo in un cassetto che contiene altri due oggetti. Quindi in questa distribuzione esiste *almeno* un cassetto che contiene 3 oggetti.

È facile convincersi che non è possibile ottenere spostando gli oggetti dalla distribuzione uniforme un'altra distribuzione in cui ogni cassetto abbia *al massimo* due oggetti.

Questo ragionamento è alla base della seguente generalizzazione del Lemma dei Cassetti. Usiamo $[n/k]^+$ per indicare la *parte intera superiore*, ovvero il minimo intero più grande di n/k. Assumendo che la divisione dia $n = k \times m + q$, abbiamo $[n/k]^+ = m + 1$ se $q > 0$ ed $[n/k]^+ m$ se $q = 0$.

Teorema 3.3 (Lemma dei Cassetti Generalizzato) *Se n oggetti sono distribuiti in k cassetti con $n > k$, allora esiste* almeno *un cassetto che contiene* almeno $[n/k]^+$ *oggetti.*

Prova: Supponiamo per assurdo che esista una distribuzione degli n oggetti in cui nessun cassetto contenga almeno $[n/k]^+$ oggetti. Vuol dire che ogni cassetto contiene al più $[n/k]^+ - 1$ oggetti. In totale $k \times ([n/k]^+ - 1)$ oggetti sono contenuti nei cassetti. Notiamo che $[n/k]^+ < n/k + 1$. Quindi

$$k \times ([n/k]^+ - 1) < k \times (n/k + 1 - 1) < n.$$

Questo contraddice il fatto che la distribuzione contenesse tutti gli n oggetti.

$\square$

Consideriamo il problema precedente: su 21 cifre decimali *almeno* tre coincidono. Deriva banalmente dal fatto che $21 = 10 \times 2 + 1$, ovvero $[21/10]^+ = 3$.

Vediamo altri semplici esempi di applicazione del Teorema 3.3.

1. Qualè il numero minimo di un gruppo di persone in cui almeno 5 abbiano lo stesso sesso? Dato che i cassetti sono due (ovvero i due sessi) dobbiamo determinare il minimo n tale che $[n/2]^+ = 5$. Abbiamo $n = 4 \times 2 + 1 = 9$.

2. Qual'è il numero minimo di interi per garantire che esistono almeno tre che sono congruenti modulo 5?

   Ricordiamo che $a \equiv_5 b$ sse a e b hanno lo stesso resto divisi per 5. Inoltre rispetto alla divisione per 5 ci sono cinque resti possibili, 0, 1, 2 ,3, 4. Bisogna quindi determinare il minimo n tale che $[n/5]^+ = 3$. Quindi $n = 5 \times 2 + 1 = 11$.

Vediamo un altro esempio.

Esempio 3.4 *In un gruppo di sei persone $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ogni coppia consiste o di due* amici *o di due* nemici. *Mostrare che devono esserci almeno 3 amici o 3 nemici l'uno con l'altro.*

Consideriamo l'elemento 1. *Dal Lemma dei Cassetti Generalizzato segue che se distribuiamo gli altri 5 in amici e nemici di* 1 *abbiamo almeno* $[5/2]^+ = 3$ *che sono suoi amici o suoi nemici.*

Supponiamo senza perdere di generalità che $\{2, 3, 4\}$ siano amici di 1. *Se sono anche amici tra di loro allora abbiamo finito. Altrimenti ci sono due possibiluità: o sono nemici tra di loro, oppure due sono amici e due sono nemici. Se $\{2, 3, 4\}$ sono nemici tra di loro allora abbiamo finito. Se due sono amici, per esempio $\{2, 3\}$ allora $\{1, 2, 3\}$ costituisce un gruppo di amici tra loro ed abbiamo finito.*

Se fossimo partiti con un gruppo di nemici di 1 *la prova sarebbe stata analoga.*

4 Permutazioni e Combinazioni

Vedremo i modi per contare le disposizioni *ordinate e non* degli oggetti di un insieme finito.

Definizione 4.1 (Permutazioni) *Sia A un insieme finito con $|A| = n$. Per $r \leq n$ una r-*permutazione *degli oggetti di A è un* disposizione ordinata *di r elementi di A.*

Esempio 4.2 *Consideriamo l'insieme $A = \{1, 5, 3\}$. Esempi di 2-permutazioni di A sono $1, 5$, $5, 1$, $3, 5$, $1, 3$. Esempi di 3-permutazioni (o più semplicemente permutazioni) sono $1, 5, 3$, $5, 3, 1$ etc. Notate che $1, 3, 1$ non è una permutazione perchè l'elemento 1 è ripetuto.*

Le permutazioni sono interessanti perchè sono le soluzioni di semplici problemi di calcolo combinatorio dipendenti dall'ordine.

Supponiamo che una squadra di tennis abbia 10 componenti. L'allenatore deve selezionare 5 giocatori per giocare gli incontri singoli. È chiaro che le soluzioni sono tutte le 5-permutazioni dei 10 giocatori, in cui l'ordine stabilisce a quale incontro è assegnato ogni giocatore. Quante sono le possibilità?

Per risolvere questo tipo di problemi è quindi necessario contare le r-permutazioni.

Teorema 4.3 *Sia A un insieme con n elementi. Il numero di r-permutazioni di elementi di A con $r \leq n$ è*

$$P(n, r) = n \times (n-1) \times \ldots \times (n - r + 1).$$

Prova: Notiamo la corrispondenza tra r-permutazioni e stringhe lunghe r sull'alfabeto A. Abbiamo che

1. il primo elemento può essere un qualsiasi elemento di A (n scelte), diciamo a_1;
2. il secondo elemento può essere un elemento di $A \setminus \{a_1\}$, diciamo a_2 ($n-1$ scelte);
3. l'r-esimo elemento può essere un elemento di $A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}\}$ ($n - (r+1)$).

Dalla Regola del Prodotto

$$P(n, r) = n \times (n-1) \times \ldots \times (n - r + 1).$$

□

Notate che

$$P(n, r) = n \times (n-1) \times \ldots \times (n - r + 1) = \frac{!n}{!(n-r)}.$$

Inoltre se $n = r$ abbiamo $P(n, n) = !n$.

Dal Teorema 4.3 segue che ci sono $P(10, 5) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$ possibiltà per selezionare in modo ordinato 5 giocatori da una squadra di 10.

Esempio 4.4 *Supponiamo che un commesso viaggiatore debba visitare otto diverse città. Il viaggio inizia in una data città, ma può visitare tutte le altre in ogni ordine (supponendo che ci siano i collegamenti).*

Dato che le sette città a parte quella di partenza possono essere ordinate in modo arbitario, le soluzioni sono tutte le permutazioni di 7 elementi. Quindi $P(7,7) = !7$.

Esempio 4.5 (Funzioni) *Siano* A *e* B *due insiemi finiti con* $|A| = n$ *e* $|B| = k$. *Determinare quante sono le funzioni diverse da* A *a* B.

Sia $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. *Una funzione* f *deve associare ad ogni* a_i *un elemento di* b. *Quindi una funzione è deteminata in modo univoco*[2] *da una ennupla* $(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in B^n$. *Le scelte per* $f(a_i)$ *sono tutti gli elementi di* B, *quindi* k. *Quindi dalla Regola del Prodotto il numero di ennuple (e quindi di funzioni) è* k^n.

Supponiamo di volere contare solo *le funzioni iniettive. La differenza è che le ennuple* $(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in B^n$ *che rappresentano la funzione devono essere tali che* $f(a_i) \neq f(a_j)$ *per* $i \neq j$. *Quindi le ennuple* $(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in B^n$ *che rappresentano le funzioni iniettive sono le* n*-permutazioni degli elementi dell'insieme* B. *Dal Teorema 4.3 abbiamo che le funzioni iniettive da* A *a* B *sono* $P(k,n) = !k \times \ldots \times !(k-n+1)$. *Notate che perchè esista almeno una funzione iniettiva tra* A *e* B *deve essere* $|A| \leq |B|$.

In un alcuni casi si è interessati a contare le disposizioni *non ordinate* degli oggetti di un insieme finito.

Definizione 4.6 (Combinazioni) *Sia* A *un insieme finito con* $|A| = n$. *Per* $r \leq n$ *una* r-combinazione *degli oggetti di* A *è un sottoinsieme di* A *di cardinalità* r.

Esempio 4.7 *Consideriamo l'insieme* $A = \{1,5,3\}$ *dell'Esempio 4.2. Le* 2*-combinazioni sono esattamente tre*

$$\{1,5\}, \{1,3\}, \{5,3\}.$$

Quante sono in generale le r-combinazioni di un insieme di cardinalità n?

Teorema 4.8 *Sia* A *un insieme con* n *elementi. Il numero di* r*-combinazioni di elementi di* A *con* $r \leq n$ *è*

$$C(n,r) = \frac{!n}{!r \times !(n-r)}.$$

Prova: Notiamo che le r-permutazioni possono essere ottenute prendendo ogni r-combinazione e poi ordinando gli elementi. Ad ogni r-combinazione corrispondono $P(r,r)$ esattamente r-permutazioni diverse. Quindi

$$P(n,r) = C(n,r) \times P(r,r).$$

[2] Formalmente esiste una biezione

Allora

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{\frac{!n}{!(n-r)}}{!r} = \frac{!n}{!r \times !(n-r)}.$$

□

Notiamo una semplice proprietà. Abbiamo dimostrato nel Teorema **??** (vedi Sezione **??**) che $|\wp(A)| = 2^n$ quando $|A| = n$. Dato che $C(n,r)$ esprime il numero di sottoinsiemi con cardinalità k abbiamo

$$\sum_{r=1}^{n} C(n,r) = 2^n.$$

Nota 4.9 (Coefficiente Binomiale) *È importante sapere che* $C(n,r)$ *è il* coefficiente binomiale *indicato comunemente con*

$$\binom{n}{r}$$

Il coefficiente binomiale è importante per la risoluzione di espressioni tipo $(x+y)^n$. *Il* Teorema del Binomiale [3] *permette di esprimere espressioni tipo* $(x+y)^n$ *come somma di termini basati sul coefficiente binomiale.*

5 Insiemi Infiniti

In questo capitolo affronteremo il problema di estendere il concetto di dimensione (*cardinalità*) agli insiemi *infiniti*. Esistono molte questioni interessanti: gli insiemi infiniti hanno tutti la stessa dimensione? Come si misurano le "dimensioni" degli insiemi infiniti? Qual'è la dimensione più piccola degli insiemi infiniti? Gli insiemi infiniti possono essere ordinati in base alla dimensione come gli insiemi finiti?

Non daremo risposta a tutte queste domande. Faremo vedere solamente alcuni risultati sostanziali: *gli insiemi infiniti non hanno tutti la stessa dimensione.* Il risultato del Teorema 1.3 si può estendere anche agli insiemi infiniti. Se abbiamo una biezione $f : A \to B$, allora $|A| = |B|$.

La definizione di equipotenza sugli insiemi infiniti produce dei risultati abbastanza sorprendenti.

Esempio 5.1 (Numeri Pari) *Consideriamo il sottoinsieme dei numeri naturali pari*

$$P_{\mathcal{N}} = \{n \in \mathcal{N} \mid \ n \text{ è pari}\}.$$

Facciamo vedere che $\mathcal{N}$ *e* $P_{\mathcal{N}}$ *sono equipotenti. Basta prendere la funzione*

$$f : \mathcal{N} \to P_{\mathcal{N}}$$

tale che $f(x) = 2 \times x$. *È facile convincersi che* f *è iniettiva e surgettiva.*

[3] che esula dagli scopi del corso.

L'Esempio 5.1 mostra che trattando insiemi infiniti alcune proprietà intuitive non valgono più. Infatti dato che $P_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ ($\mathcal{N}$ contiene in più l'insieme dei numeri dispari) si è portati a pensare che $\mathcal{N}$ abbia più elementi.

Una classe di insiemi molto importante è quella degli insiemi *numerabili* che hanno la stessa dimensione di $\mathcal{N}$.

Definizione 5.2 (Insiemi Numerabili) *Un insieme A è* numerabile *sse esiste una funzione biunivoca $f : A \to \mathcal{N}$.*

Notate che esiste una funzione biunivoca $f : A \to \mathcal{N}$ sse esiste una funzione biunivoca inversa $f^{-1} : \mathcal{N} \to A$. Inoltre la corrispondenza biunivoca $f^{-1} : \mathcal{N} \to A$ determina una *enumerazione* degli elementi di A come $\{f^{-1}(0), f^{-1}(1), \ldots\}$.

Esempio 5.3 *L'insieme dei numeri pari è numerabile visto che si può stabilire una funzione biunivoca $f : \mathcal{N} \to P_{\mathcal{N}}$ come abbiamo visto nell'Esempio 5.1. Ne deriva la seguente ovvia enumerazione $P_{\mathcal{N}} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$.*

Esempio 5.4 (Interi) *Dimostriamo che l'insieme dei numeri interi $\mathcal{Z}$ è numerabile. Consideriamo la seguente funzione $f : \mathcal{N} \to \mathcal{Z}$*

$$f(x) = \begin{cases} -x/2 & \textit{se } x \textit{ è pari} \\ \\ x + 1/2 & \textit{se } x \textit{ è dispari} \end{cases}$$

L'enumerazione dei numeri interi indotta dalla funzione è

$$\{f(0), (f(1), f(2), \ldots\} = \{0, 1, -1, 2, -2 \ldots\}.$$

La funzione f è ovviamente iniettiva. Per provare che è surgettiva bisogna fare vedere che per ogni $m \in \mathcal{Z}$ esiste $n \in \mathcal{N}$ tale che $f(n) = m$. Se m è negativo allora consideriamo $n = -m \times 2$; se m è positivo allora consideriamo $n = (m \times 2) - 1$. In entrambi i casi $f(n) = m$.

Con tecniche analoghe a quelle dell'Esempio 5.4 si può fare vedere che anche $\mathcal{Z}^+$ e $\mathcal{Z}^-$ sono numerabili. Un altro esempio notevole di insieme numerabile è quello dei numeri razionali.

Le regole che abbiamo visto nella Sezione 1 per calcolare la cardinalità di unione e prodotto di insiemi non sono più valide quando abbiamo a che fare con insiemi infiniti.

Consideriamo per esempio l'insieme degli interi $\mathcal{Z}$. Abbiamo $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^- \cup \mathcal{N}$. Abbiamo visto nell'Esempio 5.4 che $\mathcal{Z}$ è numerabile. Ma anche $\mathcal{Z}^-$ e $\mathcal{N}$ sono numerabili. Valgono infatti le seguenti proprietà.

Teorema 5.5 *Siano A e B due insiemi numerabili. Allora*

1. *$A \cup B$ è numerabile;*

2. *$A \times B$ è numerabile.*

Prova: Dato che A e B sono numerabili, esistono due funzioni biunivoche $f' : A \to \mathcal{N}$ e $g' : B \to \mathcal{N}$. Vuol dire che esistono due funzioni biunivoche $f : \mathcal{Z}^+ \to A$ e $g : \mathcal{Z}^+ \to B$ [4] che deteminano le seguenti enumerazioni di A e B

$$A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3 \ldots\}.$$

1. Diamo solo una prova intuitiva della enumerazione di $A \cup B$. Possiamo enumerare gli elementi dell'unione come segue:

   $$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots\}$$

   evitando di inserire nell'enumerazione un elemento se questo già compariva (l'intersezione può essere non vuota).

2. Facciamo vedere che $A \times B$ è equipotente a $\mathcal{Z}^+$. Consideriamo la rappresentazione del prodotto cartesiano $A \times B$ tramite tabella vista nella Sezione 1, in cui la casella corrispondente alla riga a_i e alla colonna b_j contiene la coppia (a_i, b_j). Come nel caso del prodotto cartesiano finito esiste una corrispondenza uno ad uno tra le caselle della tabella e gli elementi del prodotto cartesiano.

	b_1	b_2	$\ldots$
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\ldots$
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\ldots$
a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	$\ldots$
$\ldots$			

   Facciamo vedere che le caselle della tabella possono essere enumerate utilizzando la seguente funzione $f : \mathcal{Z}^+ \times \mathcal{Z}^+ \to \mathcal{Z}^+$ tale che

   $$f(i, j) = (i + j - 2)(i + j - 1)/2 + i.$$

   Il metodo di enumerazione delle coppie (i, j) (e quindi (a_i, b_j)) descritto da f è noto come *coda di colomba* e segue l'andamento descritto nella seguente tabella dove la casella corrispondente alla riga i ed alla colonna j contiene $f((i, j))$.

[4] Basta prendere le inverse delle funzioni $f' + 1$ e $g' + 1$.

	b_1	b_2	b_3	b_4	$\dots$
a_1	1	2	4	7	$\dots$
a_2	3	5	8	$\dots$	
a_3	6	9	$\dots$		
a_4	10	$\dots$			
a_5	15	$\dots$			
$\dots$					

Dato che $A \times B$ è equipotente a $\mathcal{Z}^+$ e che $\mathcal{Z}^+$ è numerabile, allora $A \times B$ è numerabile.

$\square$

Il risultato del Teorema 5.5 si può generalizzare a ad unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili o finiti $\{A_i\}_{i \in \mathcal{N}}$. Vediamo il caso di insiemi finiti.

Teorema 5.6 *Sia $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ una famiglia di insiemi finiti. Allora $\bigcup_{i \in \mathcal{N}} A_i$ è numerabile.*

Prova: Dato che ogni A_i è finito si ha $A_i = \{a_1^i, \dots, a_{n_i}^i\}$. Si può ottenere una enumerazione per $\bigcup_{i \in \mathcal{N}} A_i$ enumerando prima tutti gli elementi di A_1 $\{a_1^1, \dots, a_{n_1}^1\}$, poi quelli di A_2 $\{a_1^2, \dots, a_{n_2}^2\}$ etc.

$\square$

Una conseguenza fondamentale del Teorema 5.6 è che le sequenze di stringhe di ogni lunghezza su un alfabeto finito cosituiscono un insieme numerabile. Quindi le parole italiano o di un'altra grammatica (per esempio di un linguaggio di programmazione) constituiscono un insieme numerabile.

Esempio 5.7 (Insieme delle stringhe) *Sia A un alfabeto finito con $|A| = k$. Consideriamo l'insieme delle stringhe di ogni lunghezza*

$$A^* = \{b_1 \dots b_n \mid b_i \in A \wedge i \in \mathcal{N}\}.$$

Abbiamo $A^* = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} A_n$ dove $A_n = \{b_1 \dots b_n \mid b_i \in A\}$ sono le stringhe di lunghezza n.

Abbiamo visto nella Sezione 1 che, fissato $n \in \mathcal{N}$, $|A_n| = k^n$ dalla Regola del Prodotto. Quindi dal Teorema 5.6 deriva che A^* è numerabile.

Facciamo vedere ora un altro risultato fondamentale: *esistono insiemi infiniti che non sono numerabili.* Gli insiemi infiniti e non numerabili sono detti *più che numerabili.* Quindi non tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa dimensione!

Teorema 5.8 (Insieme delle parti) *L'insieme $\wp(\mathcal{N})$ è più che numerabile.*

Prova: La prova è per assurdo. Supponiamo che $\wp(\mathcal{N})$ sia numerabile. Vuol dire che esiste una enumerazione $\wp(\mathcal{N}) = \{S_0, S_1, S_2, S_3 \ldots\}$.
Ricordiamo la rappresentazione dei sottoinsiemi di un insieme di n elementi con le stringhe binarie lunghe n dell'Esempio 2.5 (vedi Sezione 1). La corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi e stringhe si può estendere a sottoinsiemi di $\mathcal{N}$ e stringhe binarie. Basta considerare l'insieme delle stringhe binarie infinite

$$B^{\infty} = \{b_1 b_2 \ldots \mid b_i \in \{0,1\} \ \forall i \in \mathcal{N}\}.$$

La funzione biunivoca $f : \wp(\mathcal{N}) \to B^{\infty}$ è quindi definita nel seguente modo per $S_h \in \wp(\mathcal{N})$, $f(S_h) = b_{h,0} b_{h,1} b_{h,2} \ldots$ dove, per ogni $i \in \mathcal{N}$, $b_{h,i} = 1$ sse $i \in S_h$ ed $b_{h,i} = 0$ sse $i \notin S_h$.
La funzione f può alternativamente essere descritta come una tabella in cui ogni casella (S_h, i) contiene il valore $b_{h,i}$. In questo modo la riga corrispondente a S_h è proprio la stringa $f(S_h) = b_{h,0} b_{h,1} b_{h,2} \ldots$.

	0	1	2	...
S_0	$b_{0,0}$	$b_{0,1}$	...	
S_1	$b_{1,0}$	$b_{1,1}$	...	
...				

Consideriamo la stringa binaria infinita corrispondente al complemento della diagonale. La diagonale è $\Delta = b_{0,0} b_{1,1} \ldots$. Quindi il complemento è la stringa $\bar{\Delta} = \bar{b}_{0,0} \bar{b}_{1,1} \ldots$ dove $\bar{0} = 1$ e $\bar{1} = 0$.
Dato che $\bar{\Delta} \in B^{\infty}$ e che f è surgettiva, deve esistere $S_j \in \wp(\mathcal{N})$ tale che $f(S_j) = \bar{\Delta}$. Dalla definizione di f abbiamo

$$f(S_j) = b_{j,0} b_{j,1} \ldots = \bar{b}_{0,0} \bar{b}_{1,1} \ldots = \bar{\Delta}.$$

Quindi, per ogni $i \in \mathcal{N}$, abbiamo $b_{j,i} = \bar{b}_{i,i}$. Inoltre abbiamo che:

1. $b_{j,i} = 1$ sse $i \in S_j$ dalla def. di f. Quindi $b_{j,i} = \bar{b}_{i,i}$, implica $\bar{b}_{i,i} = 1$, ovvero $b_{i,i} = 0$. Dalla def. di f, $b_{i,i} = 0$ sse $i \notin S_i$;

2. $b_{j,i} = 0$ sse $i \notin S_j$ dalla def. di f. Quindi $b_{j,i} = \bar{b}_{i,i}$, implica $\bar{b}_{i,i} = 0$, ovvero $b_{i,i} = 1$. Dalla def. di f, $b_{i,i} = 1$ sse $i \in S_i$.

Da 1. e 2. deriviamo che

$$S_j = \{i \in \mathcal{N} \mid i \notin S_i\}.$$

Consideriamo il valore j. Ci sono due casi: $j \in S_j$ o $j \notin S_j$. Se $j \in S_j$ abbiamo, usando la specifica di S_j di sopra, $j \notin S_j$; se $j \notin S_j$ abbiamo, usando la specifica di S_j di sopra, $j \in S_j$. Quindi si ha una contraddizione in entrambi i casi. Vuol dire che $\wp(\mathcal{N})$ non è numerabile.

□

Per quanto riguarda lo studio della dimensione, cardinalità, degli insiemi infiniti ci fermeremo qui. Infatti l'estensione del concetto di cardinalità e di ordinamento tra cardinalità degli insiemi infiniti richiede nozioni complesse che esulano dagli scopi del corso. È fondamentale però sapere che:

1. la dimensione minima degli insiemi infiniti è quella degli insiemi numerabili;

2. per ogni insieme A la dimensione di A è strettamente minore della dimensione di $\wp(A)$;

3. l'insieme dei numeri reali $\mathcal{R}$ è equipotente a $\wp(\mathcal{N})$ ed è quindi più che numerabile.

6 Esercizi

Esercizio 6.1 *Determinare la cardinalità dell'insieme delle stringhe binarie lunghe n tali che contengono* almeno *un* 1.

Sia $\bar{B}_n = \{b_1 \dots b_n \in \{0,1\}^n \mid \exists i \in \{1,n\} \mid b_i = 1\}$. *Dobbiamo determinare* $|\bar{B}_n|$. *Nell'Esercizio 2.9 della Sezione 1 abbiamo calcolato la cardinalità delle stringhe binarie lunghe n che contengono* esattamente *un* 1 *come* $\bigcup_{i\in\{1,n\}} \tilde{B}_{n,i}$ *tramite la Regola della Somma. L'insieme* $\tilde{B}_{n,i}$ *contiene le stringhe binarie lunghe n dove* 1 *occorre* solo *in posizione i, i.e.*

$$\tilde{B}_{n,i} = \{b_1 \dots b_n \in \{0,1\}^n b_i = 1 \wedge \forall j \in \{1,n\}(j \neq i \rightarrow b_j = 0)\}.$$

Potremmo seguire lo stesso approccio e calcolare $|\bar{B}_n|$ *sfruttando il fatto che* $\bar{B}_n = \bigcup_{i\in\{1,n\}} \bar{B}_{n,i}$ *dove* $\bar{B}_{n,i}$ *contiene le stringhe binarie lunghe n dove* 1 *occorre* almeno *in posizione i, i.e.*

$$\bar{B}_{n,i} = \{b_1 \dots b_n \in \{0,1\}^n b_i = 1\}.$$

In questo caso potrebbe essere $\bar{B}_{n,i} \cap \bar{B}_{n,j} \neq \emptyset$ *per* $i \neq j$. *Quindi la Regola della Somma non si può applicare per calcolare la cardinalità di* $\bigcup_{i\in\{1,n\}} \bar{B}_{n,i}$.

Un modo semplice per risolvere il problema è di considerare il duale *di* $\bar{B}_n$, *ovvero* $B_n - \bar{B}_n$. *Notiamo che* $B_n - \bar{B}_n = \{b_1 \dots b_n \mid \forall i \in \{1,n\}\ b_i = 0\}$. *Quindi esiste una sola sequenza quella formata da tutti 0 in* $B_n - \bar{B}_n$ *ovvero* $|B_n - \bar{B}_n| = 1$. *Datoi che* $|B_n| = 2^n = |\bar{B}_n| + |B_n - \bar{B}_n|$, *allora* $|\bar{B}_n| = 2^n - 1$.

Esercizio 6.2 (Relazioni) *Siano A e B due insiemi finiti con $|A| = n$ e $|B| = k$. Determinare quante sono le relazioni diverse su $A \times B$. Dalla Regola del Prodotto sappiamo che $|A \times B| = n \times k$. Dato che le relazioni sono sottoinsiemi di $A \times B$ il numero delle relazioni diverse è pari a $|\wp(A \times B)| = 2^{n \times k}$.*

Supponiamo di volere contare solo *le relazioni riflessive (assumendo ovviamente che $A = B$). Una relazione R è riflessiva sse $(a, a) \in R$ per ogni $a \in A$.*

Sappiamo che $|A \times A| = n^2$. Consideriamo la seguente partizione di $A = X \cup Y$ (tale che $X \cap Y = \emptyset$), dove $X = \{(a, a) \mid a \in A\}$ ed $Y = \{(a, b) \mid a, b \in A, a \neq b\}$. Abbiamo $|X| = n$ e $|Y| = n^2 - n = n \times (n-1)$.

Per ogni relazione riflessiva $R \subseteq A \times A$ abbiamo $X \subseteq R$. Quindi ogni relazione riflessiva R è associata in modo uno ad uno [5] con un sottoinsieme di Y, ovvero $R \cap Y$. Quindi (dal Teorema 1.3) il numero delle relazioni riflessive è uguale a quello dei sottoinsiemi possibili di Y ovvero $2^{n \times (n-1)}$.

Esercizio 6.3 *Una stringa binaria si dice* palindrome *sse è identica al suo inverso. Per esempio* 100001 *e* 101101. *Determinare la cardinalità dell'insieme delle stringhe binarie palindrome di lunghezza n, dove n è pari.*

Sia $P_n = \{b_1 \dots b_n \in B_n \mid$ che è una palindrome$\}$. Notiamo che ogni $\alpha \in P_n$ può essere scomposta in due stringhe lunghe la metà $\beta_1, \beta_2 \in B_{n/2}$ tali che $\alpha = \beta_1\beta_2$. Inoltre, dato che la stringa α è palindrome abbiamo che β_1 è il contrario di β_2.

Quindi ogni stringa $\alpha \in B_n$ è associata in modo uno ad uno [6] con una stringa $\beta \in B_{n/2}$, ovvero $\beta = b_1 \dots b_{n/2}$. Dato che $|B_{n/2}| = 2^{n/2}$, abbiamo (dal Teorema 1.3) $|P_n| = 2^{n/2}$.

Esercizio 6.4 *Consideriamo il gioco del poker con tutte e 13 le carte.*

1. *Quante sono le possibili combinazioni di carte ad ogni mano?*
2. *Quante sono le possibili combinazioni di carte ad ogni mano che contengono un poker?*
3. *Quante sono le possibili combinazioni di carte ad ogni mano che contengono una coppia ed un tris?*
4. *Quante sono le possibili combinazioni di carte ad ogni mano che contengono una doppia coppia e non un poker o una coppia ed un tris?*

1. *Ad ogni mano vengono pescate* 5 *carte dall'insieme di* $13 \times 4 = 52$ *carte. L'ordine in cui le carte vengono pescate non è importante, quindi le soluzioni sono le* 5*-combinazioni di* 52. *Dal Teorema 4.8 della Sezione 3 il numero è*
$$C(52, 5) = \frac{!52}{!5 \times !47}.$$

[5] Formalmente esiste una biezione.
[6] Formalmente esiste una biezione.

2. *Un poker consiste di quattro carte con lo stesso valore.*

   Possiamo avere un poker per ogni valore $n \in \{1, 13\}$*. Ognuno di questi casi è disgiunto dato che in una* 5*-combinazione che contiene un poker di* 1 *non ci può essere un poker di* 10.

   Fissato $n \in \{1, 13\}$ *rimane da scegliere solo una carta. La carta può essere scelta tra le rimanenti* $52 - 4 = 48$ *carte. Quindi le possibilità sono* $C(48, 1) = 48$ *per ogni* $n \in \{1, 13\}$.

   Dalla Regola della Somma (i 13 casi sono in alternativa) abbiamo un totale di $48 \times 13 = 624$ *combinazioni di* 5 *carte che contengono un poker.*

3. *Le* 5*-combinazioni che ci interessano sono determinate da una coppia* (n, k) *dove* n *è il valore del tris e* k *è il valore della coppia. Notiamo che abbiamo una scelta di 13 valori per* n *e che, siccome* $k \neq n$*, abbiamo una scelta di 12 valori per* k.

   Fissato il valore di n*, ci sono 4 carte con quel valore. Quindi ci sono* $C(4, 3) = 4$ *modi di scegliere tre carte con valore* n*. Analogamente ci sono* $C(4, 2) = 6$ *modi di scegliere due carte con valore* k.

   Dalla Regola del Prodotto abbiamo un totale di $(13 \times 4) \times (12 \times 6)$ *combinazioni di* 5 *carte che contengono un tris ed una coppia.*

4. *Le* 5*-combinazioni che ci interessano sono determinate da una tripla* (n, k, h) *dove* n *e* k *sono i valori delle coppie ed* h *è il valore dell'ultima carta. Notiamo che deve essere* $n \neq k$ *e sia* $n \neq h$ *che* $k \neq h$*. Altrimenti avremmo un tris o un poker.*

   Quindi abbiamo 13 scelte per n *e* 12 *per* k *(deve essere* $n \neq k$*). Per ogni valore di* n *e* k *abbiamo* $C(4, 2) = 6$ *modi di scegliere due carte. Infine per* h *abbiamo* 44 *carte, l'ultimo valore deve infatti essere diverso sia da* n *e da* k.

   Dalla Regola del Prodotto abbiamo un totale di $(13 \times 6) \times (12 \times 6) \times 44$ *possibiltà.*

   Questo conto contiene un errore*, infatti abbiamo contato due volte i casi* (n, k, h) *ed* (k, n, h)*. Il fatto che le* 5*-combinazioni che ci interessano siano determinate da una tripla* (n, k, h) *era sbagliato perchè l'ordine di* n *e* k *non interessa.*

   Facciamolo in un modo diverso*. Il numero di modi di scegliere i valori* n *e* k *è* $C(13, 2)$*. Per ogni valore di* n *e* k *abbiamo* $C(4, 2) = 6$ *modi di scegliere due carte. Rimane poi da scegliere il valore di* h *tra* 44 *carte.*

   Dalla Regola del Prodotto abbiamo un totale di $C(13, 2) \times 6 \times 6 \times \times 44$ *possibiltà.*

Notate che la probabilità di ottenere un poker, una doppia coppia etc. si può calcolare dividendo il numero totale di combinazioni che contengono questa situazione per il numero totale delle combinazioni (quelle del punto 1.). Provate a calcolare le varie probabilità.

References

[1] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and its Applications.* McGraw-Hill International Editions, 1999.

[2] Daniel J. Velleman *How to Prove it.* Cambridge University Press, 1998.