Corso di Laurea in Informatica Applicata

Linguaggio e Metodi della Matematica

Prova scritta del 8 Settembre 2006

[Esercizio 1]
Siano $f, g : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ le funzioni definite come:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ n+1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \qquad g(m) = \begin{cases} 2*m & \text{se } m \text{ dispari} \\ m-1 & \text{se } m \text{ pari} \end{cases}$$

Si dica, giustificando ogni risposta, se:

1. f e g sono iniettive, surgettive, biunivoche?
2. $f \circ g$ è iniettiva, surgettiva, biunivoca?

Svolgimento

Per prima cosa si noti che f non è iniettiva (ad esempio $f(1) = f(4) = 2$) ma è surgettiva (per ogni intero positivo k si ha che $2k \in f^{-1}(k)$, infatti $2k$ è sicuramente pari e quindi $f(2k) = k$). Non essendo iniettiva, f non è biunivoca.

Al contrario, g non è surgettiva (ad esempio $g^{-1}(4) = \emptyset$) ma è iniettiva (manda numeri dispari differenti in numeri pari differenti e numeri pari differenti in numeri dispari differenti). Non essendo surgettiva, g non è biunivoca.

Per quanto riguarda il secondo punto:

$$(f \circ g)(m) = \begin{cases} f(2*m) = (2*m)/2 = m & \text{se } m \text{ dispari} \\ f(m-1) = (m-1)+1 = m & \text{se } m \text{ pari} \end{cases}$$

ovvero $f \circ g$ è la funzione identità sul dominio $\mathbb{N}^+$ e quindi è iniettiva, surgettiva e biunivoca.

[Esercizio 2]
Si dica, giustificando tutte le risposte, se le seguenti formule proposizionali sono equivalenti, e se sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili:

1. $(P \to Q) \to (P \to R)$
2. $((R \lor \neg Q) \to \bot) \to \neg P$
3. $(R \land Q) \to P$

Svolgimento

Verifichiamo prima eventuali equivalenze tra formule, poi mostriamo che sono tutte soddisfacibili.

$$
\begin{aligned}
(P \to Q) \to (P \to R) &\equiv \neg(P \to Q) \lor (P \to R) \quad \text{(implic.)}\\
&\equiv \neg(\neg P \lor Q) \lor (P \to R) \quad \text{(implic.)}\\
&\equiv \neg(\neg P \lor Q) \lor (\neg P \lor R) \quad \text{(implic.)}\\
&\equiv (\neg\neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \lor R) \quad \text{(de morgan)}\\
&\equiv (P \land \neg Q) \lor (\neg P \lor R) \quad \text{(doppia neg.)}\\
&\equiv ((P \land \neg Q) \lor \neg P) \lor R \quad \text{(assoc.)}\\
&\equiv (\neg Q \lor \neg P) \lor R \quad \text{(semplif.)}\\
&\equiv \neg Q \lor \neg P \lor R \quad \text{(assoc.)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\big((R \lor \neg Q) \to \bot\big) \to \neg P &\equiv \big(\neg(R \lor \neg Q) \lor \bot\big) \to \neg P \quad \text{(implic.)}\\
&\equiv \big(\neg(R \lor \neg Q)\big) \to \neg P \quad \text{(ident.)}\\
&\equiv \neg\neg(R \lor \neg Q) \lor \neg P \quad \text{(implic.)}\\
&\equiv (R \lor \neg Q) \lor \neg P \quad \text{(doppia neg.)}\\
&\equiv \neg Q \lor \neg P \lor R \quad \text{(assoc. + comm.)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(R \land Q) \to P &\equiv \neg(R \land Q) \lor P \quad \text{(implic.)}\\
&\equiv \neg R \lor \neg Q \lor P \quad \text{(de morgan)}\\
&\equiv \neg Q \lor P \lor \neg R \quad \text{(assoc. + comm.)}
\end{aligned}
$$

Adesso è evidente che la 1 e la 2 sono equivalenti.

Per mostrare che la 3 non è equivalente alle altre basta trovare una interpretazione che renda falsa la 1 ma non la 3, o viceversa. Sia $\rho : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ definita come $\rho(P) = \rho(Q) = 1$ e $\rho(R) = 0$. Si ha $\rho \not\models \neg Q \lor \neg P \lor R$ (perché $\rho \not\models \neg Q$ e $\rho \not\models \neg P$ e $\rho \not\models R$) mentre $\rho \models \neg Q \lor P \lor \neg R$ (perché $\rho \models P$) come volevamo.

La ρ usata mostra anche che la 1 e la 2 non sono tautologie e che la 3 non è una contraddizione.

Per mostrare che la 1 e la 2 non sono contraddizioni dobbiamo fornire una interpretazione ρ' che le renda vere. A questo fine possiamo prendere qualsiasi interpretazione che renda vera R o falsa P o falsa Q. Scegliendo ad esempio $\rho'(P) = \rho'(Q) = \rho'(R) = 1$ si ha $\rho' \models \neg Q \lor \neg P \lor R$ (perché $\rho' \models R$).

Per mostrare che la 3 non è una tautologia dobbiamo fornire una interpretazione ρ'' che la renda falsa. A questo fine possiamo prendere $\rho''(Q) = \rho''(R) = 1$ e $\rho''(P) = 0$ si ha $\rho'' \not\models \neg Q \lor P \lor \neg R$ (perché $\rho'' \not\models \neg Q$ e $\rho'' \not\models P$ e $\rho'' \not\models \neg R$).

[Esercizio 3]
Si dica se le seguenti proprietà su insiemi sono valide, fornendo una dimostrazione formale in caso positivo oppure un controesempio in caso negativo:

1. $\forall A, B, C.\ (\ (A \subseteq C\ \vee\ B \subseteq C)\ \rightarrow\ (A \cap B \subseteq C)\ )$

2. $\forall A, B, C.\ (\ (A \subseteq C\ \vee\ B \subseteq C)\ \rightarrow\ (A \cup B \subseteq C)\ )$

Svolgimento

La proprietà $\forall A, B, C.\ (\ (A \subseteq C\ \vee\ B \subseteq C)\ \rightarrow\ (A \cap B \subseteq C)\ )$ è valida, come dimostrato dalla seguente prova formale:

1.	$A \subseteq C\ \vee\ B \subseteq C$	(Ipotesi aggiuntiva)
2.	$x \in A \cap B$	(Ipotesi aggiuntiva)
3.	$A \subseteq C$	(Ipotesi aggiuntiva)
4.	$x \in A$	(**A**.**E**.$_\cap$ da 2)
5.	$x \in C$	(**M.P**.$_\subseteq$ da 3 e 4)
6.	$B \subseteq C$	(Ipotesi aggiuntiva)
7.	$x \in B$	(**A**.**E**.$_\cap$ da 2)
8.	$x \in C$	(**M.P**.$_\subseteq$ da 6 e 7)
9.	$x \in C$	(**Casi** da 1, $\frac{[3]}{5}$ e $\frac{[6]}{8}$)
10.	$x \in A \cap B\ \rightarrow\ x \in C$	(**Imp**. da $\frac{[2]}{9}$)
11.	$A \cap B \subseteq C$	($\forall$**G**$_\subseteq$ da 10)
12.	$(A \subseteq C\ \vee\ B \subseteq C)\ \rightarrow\ (A \cap B \subseteq C)\ )$	(**Imp**. da $\frac{[1]}{11}$)
13.	$\forall A, B, C.\ \big(\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq B \setminus A)\ \rightarrow\ (A \subseteq B \setminus C\ \wedge\ C \subseteq B)\ \big)$	($\forall$**G** per tre volte da 12)

La proprietà $\forall A, B, C.\ (\ (A \subseteq C\ \vee\ B \subseteq C)\ \rightarrow\ (A \cup B \subseteq C)\ )$ non è valida, come dimostrato dal seguente semplice controesempio.
Prendiamo $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ e $C = \{1, 3\}$.
La premessa $(A \subseteq C\ \vee\ B \subseteq C)$ è vera perché $A \subseteq C$ è vera, ma la conclusione è falsa, perché ovviamente $A \cup B = \{1, 2\} \not\subseteq C$.

[Esercizio 4]
Dire di quali proprietà gode la relazione

$$R = \{ \ (a,a), \ (b,a), \ (a,b), \ (a,c), \ (c,a) \ \}$$

definita sull'insieme $A = \{a,b,c,d\}$ (riflessiva? simmetrica? transitiva? irriflessiva? antisimmetrica? asimmetrica?) Dire inolre qual è la più piccola relazione di equivalenza che contiene R.

Svolgimento

R non è riflessiva perché, ad esempio, non contiene la coppia (b,b).

R è simmetrica perché contiene l'inversa di ciascuna coppia.

R non è transitiva perché contiene le coppie (b,a) e (a,b) ma non la coppia (b,b).

R non è irriflessiva perché contiene la coppia (a,a).

R non è antisimmetrica perché contiene le coppie (b,a) e (a,b) con $a \neq b$.

R non è asimmetrica perché contiene la coppia (a,a).

Ricordiamo che una relazione viene detta di equivalenza se è riflessiva, transitiva e simmetrica. Quindi bisogna aggiungere a R le coppie (b,b), (c,c) e (d,d) per renderla riflessiva. La relazione ottenuta è simmetrica, ma bisogna farne la chiusura transitiva, ottenendo:

$$R' = \{ \ (a,a), \ (b,a), \ (a,b), \ (a,c), \ (c,a), \ (b,b), \ (c,c), \ (d,d), \ (b,c), \ (c,b), \ \}$$