

Linguaggio e Metodi della Matematica

Prova scritta del 8 Settembre 2006

[Esercizio 1]

Siano $f, g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ le funzioni definite come:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ n+1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \quad g(m) = \begin{cases} 2 * m & \text{se } m \text{ dispari} \\ m-1 & \text{se } m \text{ pari} \end{cases}$$

Si dica, giustificando ogni risposta, se:

1. f e g sono iniettive, surgettive, biunivoche?
2. $f \circ g$ è iniettiva, surgettiva, biunivoca?

[Esercizio 2]

Si dica, giustificando tutte le risposte, se le seguenti formule proposizionali sono equivalenti, e se sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili:

1. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$
2. $((R \vee \neg Q) \rightarrow \perp) \rightarrow \neg P$
3. $(R \wedge Q) \rightarrow P$

[Esercizio 3]

Si dica se le seguenti proprietà su insiemi sono valide, fornendo una dimostrazione formale in caso positivo oppure un controesempio in caso negativo:

1. $\forall A, B, C. ((A \subseteq C \vee B \subseteq C) \rightarrow (A \cap B \subseteq C))$
2. $\forall A, B, C. ((A \subseteq C \vee B \subseteq C) \rightarrow (A \cup B \subseteq C))$

[Esercizio 4]

Dire di quali proprietà gode la relazione

$$R = \{ (a, a), (b, a), (a, b), (a, c), (c, a) \}$$

definita sull'insieme $A = \{a, b, c, d\}$ (riflessiva? simmetrica? transitiva? ir-riflessiva? antisimmetrica? asimmetrica?) Dire inoltre qual è la più piccola relazione di equivalenza che contiene R .