Corso di Laurea in Informatica Applicata

Linguaggio e Metodi della Matematica

Prova scritta del 25 Luglio 2006

[Esercizio 1]
Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la funzione definita come $f(z) = |z|$. Si dica, giustificando ogni risposta, se:

1. è possibile trovare una funzione surgettiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $g \circ f$ non sia surgettiva?
2. è possibile trovare una funzione iniettiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $h \circ f$ non sia iniettiva?

Svolgimento

Per prima cosa si noti che f è surgettiva (banalmente il valore assoluto di un numero positivo è il numero stesso) ma non iniettiva (ad esempio sia ha $|-1| = |1| = 1$).

Per quanto il primo punto, dato che f è surgettiva e che la composizione di funzioni surgettive è sempre surgettiva, la funzione g richiesta non può esistere.

Per quanto riguarda il secondo punto, se prendiamo la funzione identità $h(x) = x$ (che è ovviamente iniettiva) si ha $(h \circ f)(z) = |z|$ che non è iniettiva.

[Esercizio 2]
Si dica se le seguenti proprietà su insiemi sono valide, fornendo una dimostrazione formale in caso positivo oppure un controesempio in caso negativo:

1. $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cup C \subseteq B \cup D)\ )$
2. $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cup C \supseteq B \cup D)\ )$

Svolgimento

La proprietà $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cup C \subseteq B \cup D)\ )$ è valida, come dimostrato dalla seguente prova formale:

1.	$(A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)$	(Ipotesi aggiuntiva)
2.	$\quad x \in A \cup C$	(Ipotesi aggiuntiva)
3.	$\qquad x \in A\ \vee\ x \in C$	(Definizione da 2)
4.	$\qquad x \in A$	(Ipotesi aggiuntiva)
5.	$\qquad\quad A \subseteq B$	(**A.E.** da 1)
6.	$\qquad\quad x \in B$	(**M.P.**$_\subseteq$ da 4 e 5)
7.	$\qquad\quad x \in B \cup D$	(**O.I.**$_\cup$ da 6)
8.	$\qquad x \in C$	(Ipotesi aggiuntiva)
9.	$\qquad\quad C \subseteq D$	(**A.E.** da 1)
10.	$\qquad\quad x \in D$	(**M.P.**$_\subseteq$ da 8 e 9)
11.	$\qquad\quad x \in B \cup D$	(**O.I.**$_\cup$ da 10)
12.	$\qquad x \in B \cup D$	(**Casi** da 3, $\frac{[4]}{7}$ e $\frac{[8]}{11}$)
13.	$\quad x \in A \cup C \rightarrow x \in B \cup D$	(**Imp.** da $\frac{[2]}{12}$)
14.	$\quad A \cup C \subseteq B \cup D$	($\forall$**G**$_\subseteq$ da 13)
15.	$(A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cup C \subseteq B \cup D)$	(**Imp.** da $\frac{[1]}{14}$)
16.	$\forall A, B, C, D.\ \big(\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cup C \subseteq B \cup D)\ \big)$	($\forall$**G** per quattro volte da 15)

La proprietà $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cup C \supseteq B \cup D)\ )$ non è valida, come dimostrato dal seguente semplice controesempio.
Prendiamo $A = C = \emptyset$, $B = \{1\}$ e $D = \{2\}$.
La premessa $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D)$ è vera, ma la conclusione è falsa: Ovviamente $A \cup C = \emptyset$ e $B \cup D = \{1, 2\}$, quindi $A \cup C \subset B \cup D$, ovvero $A \cup C \not\supseteq B \cup D$.

[Esercizio 3]
Dire di quali proprietà gode la relazione

$$R = \{\ (n,m)\ \mid\ n,m \in \mathbb{N}^+\ \wedge\ n \times m \text{ è pari }\ \}$$

(riflessiva? simmetrica? transitiva? irriflessiva? antisimmetrica? asimmetrica?)

Svolgimento

R non è riflessiva perché, ad esempio, $1 \times 1 = 1$ è dispari e quindi $(1,1) \notin R$.

R è simmetrica, perché per ogni coppia di naturali si ha $n \times m = m \times n$ e quindi $(n,m) \in R$ se e solo se $(m,n) \in R$.

R non è transitiva perché, ad esempio, $(1,2) \in R$ e $(2,3) \in R$ ma $(1,3) \notin R$.

R non è irriflessiva perché, ad esempio, contiene la coppia $(2,2)$.

R non è antisimmetrica perché, ad esempio, $(2,4) \in R$ e $(4,2) \in R$ ma $2 \neq 4$.

R non è asimmetrica perché, ad esempio, le coppie $(2,4)$, $(4,2)$ appartengono a R.

[Esercizio 4]
Francesco e Diego stanno scrivendo rispettivamente le parole `LINGUAGGIO` e `matematica` su due tastiere diverse collegate allo stesso display.

Quante sono le diverse stringhe che possono comparire sul display? (es. `LmatINemGUAaGtiGIOca`)

Quante sono le diverse stringhe che possono comparire sul display assumendo che Francesco sia il più lesto a digitare il primo carattere e finisca di scrivere prima di Diego?

Quante sono le diverse stringhe che possono comparire sul display assumendo che Francesco sia il più lesto a digitare il primo carattere ma finisca di scrivere dopo di Diego?

Svolgimento

Le due stringhe sono entrambe lunghe 10 caratteri, quindi la stringa mostrata sul display sarà lunga 20 caratteri che saranno presi in maniera alternata dalle due stringhe.
Se prendiamo 10 posizioni delle 20 disponibili dove disporre i caratteri digitati da Francesco allora la stringa risultante viene determinata univocamente (perché a Diego andranno le 10 posizioni rimanenti e l'ordine col quale Francesco e Diego devono disporre i caratteri nelle 10 posizioni a loro assegnate è fissato).
Quindi il problema si riduce a trovare quanti sono i modi possibili di scegliere 10 elementi (le posizioni per i caratteri di Francesco) da un insieme di 20, ovvero sono le disposizioni non ordinate (combinazioni) di 10 elementi presi su un insieme di 20:

$$C(20, 10) = 20!/(10! \cdot (20 - 10)!) = 20!/(10! \cdot 10!) = 184.756$$

Se sappiamo che la prima posizione viene assegnata a Francesco e l'ultima a Diego, allora rimangono da scegliere solo le altre 9 posizioni per Francesco dalle 18 rimanenti (non dalle 20 complessive!):

$$C(18, 9) = 18!/(9! \cdot (18 - 9)!) = 18!/(9! \cdot 9!) = 48.620$$

Se sappiamo che la prima e l'ultima posizione sono assegnate a Francesco, allora rimangono da scegliere solo le altre 8 posizioni per Francesco dalle 18 rimanenti (non dalle 20 complessive!):

$$C(18, 8) = 18!/(8! \cdot (18 - 8)!) = 18!/(8! \cdot 10!) = 43.758$$