Corso di Laurea in Informatica Applicata

Linguaggio e Metodi della Matematica

Prova scritta del 4 Luglio 2006

[Esercizio 1]
Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita come $f(z) = z + 1$. Si dica, giustificando ogni risposta, se:

1. è possibile trovare una funzione surgettiva $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $g \circ f$ non sia surgettiva?
2. è possibile trovare una funzione iniettiva $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $h \circ f$ non sia iniettiva?

Svolgimento

Per prima cosa si noti che f è biunivoca (l'inversa è $f^{-1}(x) = x - 1$) e quindi è sia iniettiva che surgettiva.

Per quanto riguarda il primo punto, dato che f è surgettiva e che la composizione di funzioni surgettive è sempre surgettiva, la funzione g richiesta non può esistere.

Analogamente, per quanto riguarda il secondo punto, dato che f è iniettiva e che la composizione di funzioni iniettive è sempre iniettiva, la funzione h richiesta non può esistere.

[Esercizio 2]
Si dica, giustificando tutte le risposte, se le seguenti formule predicative sono equivalenti, e se sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili.

1. $\forall x.P(x) \rightarrow \exists x.Q(x)$
2. $\forall x.(\ \neg P(x) \rightarrow Q(x)\ ) \rightarrow \exists x.Q(x)$

Svolgimento

Verifichiamo prima se le formule sono equivalenti, poi mostriamo che sono soddisfacibili.

$$\begin{array}{rcll}
\forall x.P(x) \rightarrow \exists x.Q(x) & \equiv & \neg\forall x.P(x) \vee \exists x.Q(x) & \text{(implic.)} \\
& \equiv & \exists x.\neg P(x) \vee \exists x.Q(x) & \text{(neg. quant.)} \\
& \equiv & \exists x.(\ \neg P(x) \vee Q(x)\ ) & \text{(dist. quant.)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\forall x.\big(\ \neg P(x) \rightarrow Q(x)\ \big) \rightarrow \exists x.Q(x) & \equiv & \neg\forall x.\big(\ \neg P(x) \rightarrow Q(x)\ \big) \vee \exists x.Q(x) & \text{(implic.)} \\
& \equiv & \neg\forall x.\big(\ \neg\neg P(x) \vee Q(x)\ \big) \vee \exists x.Q(x) & \text{(implic.)} \\
& \equiv & \neg\forall x.\big(\ P(x) \vee Q(x)\ \big) \vee \exists x.Q(x) & \text{(doppia neg.)} \\
& \equiv & \exists x.\neg\big(\ P(x) \vee Q(x)\ \big) \vee \exists x.Q(x) & \text{(neg. quant.)} \\
& \equiv & \exists x.\big(\ \neg(\ P(x) \vee Q(x)\ ) \vee Q(x)\ \big) & \text{(dist. quant.)} \\
& \equiv & \exists x.\big(\ (\ \neg P(x) \wedge \neg Q(x)\ ) \vee Q(x)\ \big) & \text{(de morgan)} \\
& \equiv & \exists x.\big(\ (\ \neg P(x) \vee Q(x)\ ) \wedge (\ \neg Q(x) \vee Q(x)\ )\ \big) & \text{(distr.)} \\
& \equiv & \exists x.\big(\ (\ \neg P(x) \vee Q(x)\ ) \wedge \top\ \big) & \text{(terzo escl.)} \\
& \equiv & \exists x.(\ \neg P(x) \vee Q(x)\ ) & \text{(identità)}
\end{array}$$

Quindi le formule sono equivalenti.

Per mostrare che non sono tautologie si consideri l'interpretazione $\mathcal{I}$ tale che $D_{\mathcal{I}} = \{a\}$, $TS_{\mathcal{I}}(P) = \{a\}$ e $TS_{\mathcal{I}}(Q) = \emptyset$. Infatti $\mathcal{I} \models P(a)$ e quindi $\mathcal{I} \not\models \neg P(a)$; inoltre $\mathcal{I} \not\models Q(a)$. Quindi $\mathcal{I} \not\models \neg P(a) \vee Q(a)$. Dato che a è l'unico valore nel dominio, si ha $\mathcal{I} \not\models \exists x.(\ \neg P(x) \vee Q(x)\ )$, che sappiamo essere equivalente alle due formule.

Analogamente, per mostrare che non sono contraddizioni si consideri l'interpretazione $\mathcal{I}'$ tale che $D_{\mathcal{I}'} = \{a\}$, $TS_{\mathcal{I}'}(P) = \emptyset$ e $TS_{\mathcal{I}'}(Q) = \{a\}$. Infatti $\mathcal{I}' \not\models P(a)$ e quindi $\mathcal{I}' \models \neg P(a)$. Inoltre $\mathcal{I}' \models Q(a)$ e $\mathcal{I}' \models \neg P(a) \vee Q(a)$. Dunque $\mathcal{I}' \models \exists x.(\ \neg P(x) \vee Q(x)\ )$, scegliendo $x = a$.

Le interpretazioni $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ mostrano che le formule sono soddisfacibili.

[Esercizio 3]
Si dica se le seguenti proprietà su insiemi sono valide, fornendo una dimostrazione formale in caso positivo oppure un controesempio in caso negativo:

1. $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \subseteq B \cap D)\ )$
2. $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \supseteq B \cap D)\ )$

Svolgimento

La proprietà $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \subseteq B \cap D)\ )$ è valida, come dimostrato dalla seguente prova formale:

1.	$(A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)$	(Ipotesi aggiuntiva)
2.	$\quad x \in A \cap C$	(Ipotesi aggiuntiva)
3.	$\qquad x \in A$	(**A**.**E**.$_\cap$ da 2)
4.	$\qquad A \subseteq B$	(**A**.**E**. da 1)
5.	$\qquad x \in B$	(**M**.**P**.$_\subseteq$ da 3 e 4)
6.	$\qquad x \in C$	(**A**.**E**.$_\cap$ da 2)
7.	$\qquad C \subseteq D$	(**A**.**E**. da 1)
8.	$\qquad x \in D$	(**M**.**P**.$_\subseteq$ da 6 e 7)
9.	$\qquad x \in B \cap D$	(**A**.**I**.$_\cap$ da 5 e 8)
10.	$\quad x \in A \cap C \rightarrow x \in B \cap D$	(**Imp**. da $\frac{[2]}{9}$)
11.	$\quad A \cap C \subseteq B \cap D$	($\forall$**G**$_\subseteq$ da 10)
12.	$(A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \subseteq B \cap D)$	(**Imp**. da $\frac{[1]}{11}$)
13.	$\forall A, B, C, D.\ \big(\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \subseteq B \cap D)\ \big)$	($\forall$**G** per quattro volte da 12)

La proprietà $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \supseteq B \cap D)\ )$ non è valida, come dimostrato dal seguente semplice controesempio.
Prendiamo $A = C = \emptyset$, $B = D = \{1\}$.
La premessa $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D)$ è vera, ma la conclusione è falsa: Ovviamente $A \cap C = \emptyset$ e $B \cap D = \{1\}$, quindi $A \cap C \subset B \cap D$, ovvero $A \cap C \not\supseteq B \cap D$.

[Esercizio 4]
Dire di quali proprietà gode la relazione

$$R = \{ \ (n, m) \ \mid \ n, m \in \mathbb{N}^+ \ \wedge \ n + m \text{ è pari } \}$$

(riflessiva? simmetrica? transitiva? irriflessiva? antisimmetrica? asimmetrica?)

Svolgimento

R è riflessiva, perché per ogni naturale positivo n si ha $n + n = 2n$ che è pari e quindi $(n, n) \in R$.

R è simmetrica, perché per ogni coppia di naturali si ha $n + m = m + n$ e quindi $(n, m) \in R$ se e solo se $(m, n) \in R$.

R è transitiva, perché se $(n, m) \in R$ e $(m, k) \in R$, allora $n+m+m+k = n + 2m + k$ è pari e sottraendo un altro numero pari si deve ottenere ancora un numero pari: togliendo $2m$ si ottiene $n + k$ e quindi $(n, k) \in R$.

R non è irriflessiva perché, ad esempio, contiene la coppia $(1, 1)$.

R non è antisimmetrica perché, ad esempio, $(1, 3) \in R$ e $(3, 1) \in R$ ma $1 \neq 3$.

R non è asimmetrica perché, ad esempio, le coppie $(1, 3)$, $(3, 1)$ appartengono a R.