Corso di Laurea in Informatica Applicata

Linguaggio e Metodi della Matematica

Prova scritta del 7 Giugno 2006

[Esercizio 1]
Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita come $f(n) = n^2$. Si dica, giustificando ogni risposta, se:

1. è possibile trovare una funzione surgettiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $g \circ f$ non sia surgettiva?
2. è possibile trovare una funzione iniettiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $h \circ f$ non sia iniettiva?

Svolgimento

Per prima cosa si noti che f è iniettiva (due numeri naturali hanno lo stesso quadrato solo se sono uguali) ma non surgettiva (non esiste alcun numero naturale il cui quadrato sia 2).

Per quanto riguarda il primo punto, se prendiamo la funzione identità $g(x) = x$ (che è ovviamente surgettiva) si ha $(g \circ f)(n) = n^2$ che non è surgettiva.

Per quanto riguarda il secondo punto, dato che f è iniettiva e che la composizione di funzioni iniettive è sempre iniettiva, la funzione h richiesta non può esistere.

[Esercizio 2]
Si dica, giustificando tutte le risposte, se le seguenti formule predicative sono equivalenti, e se sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili.

1. $(\ \forall x.Q(x)\ \rightarrow\ \forall x.\neg P(x)\ )\ \rightarrow\ \exists x.\neg Q(x)$
2. $\exists x.(\ Q(x)\ \rightarrow\ P(x)\ )$

Svolgimento

Verifichiamo prima se le formule sono equivalenti, poi mostriamo che sono soddisfacibili.

$$
\begin{aligned}
\big(\ \forall x.Q(x)\ \rightarrow\ \forall x.\neg P(x)\ \big)\ \rightarrow\ \exists x.\neg Q(x) \ &\equiv\ \neg\big(\ \forall x.Q(x)\ \rightarrow\ \forall x.\neg P(x)\ \big)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x) \quad \text{(implic.)}\\
&\equiv\ \neg\big(\ \neg\forall x.Q(x)\ \vee\ \forall x.\neg P(x)\ \big)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x) \quad \text{(implic.)}\\
&\equiv\ \big(\ \neg\neg\forall x.Q(x)\ \wedge\ \neg\forall x.\neg P(x)\ \big)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x) \quad \text{(de morgan)}\\
&\equiv\ \big(\ \forall x.Q(x)\ \wedge\ \neg\forall x.\neg P(x)\ \big)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x) \quad \text{(doppia neg.)}\\
&\equiv\ \big(\ \forall x.Q(x)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x)\ \big)\ \wedge\\
&\qquad \big(\ \neg\forall x.\neg P(x)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x)\ \big) \quad \text{(distrib.)}\\
&\equiv\ \big(\ \forall x.Q(x)\ \vee\ \neg\forall x.Q(x)\ \big)\ \wedge\\
&\qquad \big(\ \neg\forall x.\neg P(x)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x)\ \big) \quad \text{(neg. quant.)}\\
&\equiv\ \top\ \wedge\ \big(\ \neg\forall x.\neg P(x)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x)\ \big) \quad \text{(terzo escl.)}\\
&\equiv\ \neg\forall x.\neg P(x)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x) \quad \text{(identità)}\\
&\equiv\ \exists x.\neg\neg P(x)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x) \quad \text{(neg. quant.)}\\
&\equiv\ \exists x.P(x)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x) \quad \text{(doppia neg.)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists x.\big(\ Q(x)\ \rightarrow\ P(x)\ \big) \ &\equiv\ \exists x.\big(\ \neg Q(x)\ \vee\ P(x)\ \big) \quad \text{(implic.)}\\
&\equiv\ \exists x.\neg Q(x)\ \vee\ \exists x.P(x) \quad \text{(dist. quant.)}\\
&\equiv\ \exists x.P(x)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x) \quad \text{(comm.)}
\end{aligned}
$$

Quindi le formule sono equivalenti.

Per mostrare che non sono tautologie si consideri l'interpretazione $\mathcal{I}$ tale che $D_{\mathcal{I}} = \{a\}$, $TS_{\mathcal{I}}(P) = \emptyset$ e $TS_{\mathcal{I}}(Q) = \{a\}$. Infatti $\mathcal{I} \not\models P(a)$ mentre $\mathcal{I} \models Q(a)$ e quindi $\mathcal{I} \not\models \neg Q(a)$. Dato che a è l'unico valore nel dominio, si ha $\mathcal{I} \not\models \exists x.P(x)$ e $\mathcal{I} \not\models \exists x.\neg Q(x)$. Quindi $\mathcal{I} \not\models \exists x.P(x)\ \vee\ \exists x.\neg Q(x)$, che sappiamo essere equivalente alle due formule.

Analogamente, per mostrare che non sono contraddizioni si consideri l'interpretazione $\mathcal{I}'$ tale che $D_{\mathcal{I}'} = \{a\}$, $TS_{\mathcal{I}'}(P) = \{a\}$ e $TS_{\mathcal{I}'}(Q) = \emptyset$. Infatti $\mathcal{I}' \models P(a)$ e quindi $\mathcal{I}' \models \exists x.P(x)$ (scegliendo $x = a$). Dunque $\mathcal{I}' \models \exists x.P(x) \vee \exists x.\neg Q(x)$, che sappiamo essere equivalente alle due formule.

Le interpretazioni $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ mostrano che le formule sono soddisfacibili.

[Esercizio 3]
Si dica se le seguenti proprietà su insiemi sono valide, fornendo una dimostrazione formale in caso positivo oppure un controesempio in caso negativo:

1. $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \subseteq B \cup D)\ )$
2. $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \supseteq B \cup D)\ )$

Svolgimento

La proprietà $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \subseteq B \cup D)\ )$ è valida, come dimostrato dalla seguente prova formale:

1.	$(A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)$	(Ipotesi aggiuntiva)
2.	$\quad x \in A \cap C$	(Ipotesi aggiuntiva)
3.	$\qquad x \in A$	(**A**.**E**.$_\cap$ da 2)
4.	$\qquad A \subseteq B$	(**A**.**E**. da 1)
5.	$\qquad x \in B$	(**M**.**P**.$_\subseteq$ da 3 e 4)
6.	$\qquad x \in B \cup D$	(**O**.**I**.$_\cup$ da 5)
7.	$\quad x \in A \cap C \rightarrow x \in B \cup D$	(**Imp**. da $\frac{[2]}{6}$)
8.	$\quad A \cap C \subseteq B \cup D$	($\forall$**G**$_\subseteq$ da 7)
9.	$(A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \subseteq B \cup D)$	(**Imp**. da $\frac{[1]}{8}$)
10.	$\forall A, B, C, D.\ \big(\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \subseteq B \cup D)\ \big)$	($\forall$**G** per quattro volte da 9)

La proprietà $\forall A, B, C, D.\ (\ (A \subseteq B\ \wedge\ C \subseteq D)\ \rightarrow\ (A \cap C \supseteq B \cup D)\ )$ non è valida, come dimostrato dal seguente semplice controesempio.
Prendiamo $A = C = \emptyset$, $B = \{1\}$ e $D = \{2\}$.
La premessa $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D)$ è vera, ma la conclusione è falsa: Ovviamente $A \cap C = \emptyset$ e $B \cup D = \{1, 2\}$, quindi $A \cap C \subset B \cup D$, ovvero $A \cap C \not\supseteq B \cup D$.

[Esercizio 4]
Dire di quali proprietà gode la relazione $R = \{\ (b,a),\ (c,b),\ (c,d)\ \}$ definita sull'insieme $A = \{a,b,c,d\}$ (riflessiva? simmetrica? transitiva? irriflessiva? antisimmetrica? asimmetrica?) Dire inolre qual è la più piccola relazione di ordinamento che contiene R e disegnarne il diagramma di Hasse.

Svolgimento

R non è riflessiva perché, ad esempio, non contiene la coppia (a,a).

R non è simmetrica perché, ad esempio, contiene la coppia (b,a) ma non la coppia (a,b).

R non è transitiva perché contiene le coppie (c,b) e (b,a) ma non la coppia (c,a).

R è irriflessiva perché non contiene le coppie (a,b), (b,b), (c,c) e (d,d).

R è antisimmetrica perché la premessa $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$ è falsa per tutti i possibili elementi $x,y \in A$.

R è asimmetrica perché le coppie (a,b), (b,c) e (d,c) non appartengono a R.

Ricordiamo che una relazione viene detta di ordinamento se è riflessiva, transitiva e antisimmetrica. Quindi bisogna aggiungere a R le coppie (a,a), (b,b), (c,c) e (d,d) per renderla riflessiva. Poi bisogna fare la chiusura transitiva, ottenendo:

$$R' = \{\ (b,a),\ (c,b),\ (c,d),\ (a,a),\ (b,b),\ (c,c),\ (d,d),\ (c,a)\}$$

R' è una relazione di ordinamento e quindi è anche la più piccola relazione di ordinamento che contiene R (se togliamo una o più delle coppie aggiunte non è più un ordinamento).

Il diagramma di Hasse corrisponde a tracciare R stessa: