Corso di Laurea in Informatica Applicata

Linguaggio e Metodi della Matematica

Prova scritta del 8 Febbraio 2006

[Esercizio 1]

Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita come $f(z) = \begin{cases} z+1 & \text{se } z < 0 \\ z-1 & \text{se } z \geq 0 \end{cases}$ Si dica, giustificando ogni risposta, se f è iniettiva, surgettiva, bigettiva. Inoltre, a cosa corrispondono $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(1)$?

[Esercizio 2]

Si dica, giustificando tutte le risposte, se le seguenti formule predicative sono equivalenti, e se sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili.

1. $\forall x.P(x) \ \rightarrow \ \exists x.(P(x) \wedge \neg Q(x))$
2. $\exists x.((P(x) \wedge Q(x)) \ \rightarrow \ \bot)$

[Esercizio 3 - SOLO PER RECUPERO PRIMO COMPITINO]

P	Q	$P \vert Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tutti i connettivi logici possono essere espressi in termini del solo operatore $P|Q$ (si legge "P *nand* Q") definito dalla tabella di verità a lato. Ad esempio, $P \wedge Q \ \equiv \ (P|Q)|(P|Q)$ e $\neg P \ \equiv \ P|P$. Si scrivano delle formule equivalenti a $P \vee Q$ e $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R$ usando il solo operatore *nand*.

[Esercizio 4 - SOLO PER RECUPERO PRIMO COMPITINO]

Scrivere una formula della logica predicativa che formalizzi la frase "a è il più grande dei divisori primi di b" sul dominio dei naturali positivi, sfruttando la costante 1, il simbolo di funzione $\times$, e i simboli di predicato $=$, $<$ e $\leq$ con l'ovvio significato. (*Consiglio*: definire dapprima le formule per esprimere che "x è divisore di y" e che "x è primo" per poi riusarle).

[Esercizio 5]

Si dica se le seguenti proprietà su insiemi sono valide, fornendo una dimostrazione formale in caso positivo oppure un controesempio in caso negativo:

1. $\forall A, B, C. \ ((A \subseteq B \ \wedge \ A \cap B \subseteq C) \ \rightarrow \ (A \subseteq B \cap C))$
2. $\forall A, B, C. \ ((A \subseteq B \ \wedge \ A \cap B \subseteq C) \ \rightarrow \ (B \subseteq C))$

[Esercizio 6]

Si considerino le stringhe di lunghezza 10 sull'alfabeto $A = \{a, b\}$. In quante di esse compaiono esattamente due simboli a? E in quante di esse a compare al massimo due volte?

[Esercizio 7 - SOLO PER RECUPERO SECONDO COMPITINO]

Date due relazioni $R_1 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $R_2 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la loro *composizione* è la relazione $R_2 \circ R_1 = \ \{(n, m) \ | \ \exists k.(n \ R_1 \ k \ \wedge \ k \ R_2 \ m\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Esistono due relazioni R e S tali che $S \circ R = \{(1, 1)\}$ mentre $R \circ S = \emptyset$? A cosa corrisponde la relazione $R_{\geq} \circ R_{\leq}$?

[Esercizio 8 - SOLO PER RECUPERO SECONDO COMPITINO]

Disegnare il diagramma di Hasse della relazione di divisibilità sul dominio $\{2, 3, 4, 5, 15, 22, 176, 198\}$.