Corso di Laurea in Informatica Applicata

Linguaggio e Metodi della Matematica

Prova scritta del 18 Gennaio 2006

[Esercizio 1]
Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita come $f(n) = n^2 - 3n + 1$. Si dica, giustificando ogni risposta, se f è iniettiva, surgettiva, bigettiva. Inoltre, a cosa corrispondono $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(5)$?

[Esercizio 2]
Si dica, giustificando tutte le risposte, se le seguenti formule predicative sono equivalenti, e se sono tautologie, contraddizioni o soddisfacibili.

1. $\forall x.(Q(x) \land \neg R(x)) \ \to \ \exists x.\neg P(x)$
2. $\exists x.(P(x) \ \to \ R(x) \lor \neg Q(x))$

[Esercizio 3 - SOLO PER RECUPERO PRIMO COMPITINO]

P	Q	$P \vert Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Si dimostri che tutti i connettivi logici (della logica proposizionale) possono essere espressi in termini del solo operatore $P|Q$ (si legge "P *nand* Q") definito dalla tabella di verità a lato. L'operatore di *nand* è commutativo? È associativo?

[Esercizio 4 - SOLO PER RECUPERO PRIMO COMPITINO]
Scrivere una formula della logica predicativa che formalizzi la frase "m è il minimo comune multiplo di a e b" sul dominio dei naturali, sfruttando la costante 0, il simbolo di funzione $\times$, e i simboli di predicato $=$ e $\leq$ con l'ovvio significato. (*Consiglio*: definire la formula per esprimere che "x è multiplo di y" e poi riusarla più volte).

[Esercizio 5]
Si dica se le seguenti proprietà su insiemi sono valide, fornendo una dimostrazione formale in caso positivo oppure un controesempio in caso negativo:

1. $\forall A, B, C. \ ((A \subseteq B \cup C) \ \to \ (A - C \subseteq B))$
2. $\forall A, B, C. \ ((A \subseteq B \cup C) \ \to \ (A \cap C \subseteq B))$

[Esercizio 6]
Si considerino le stringhe di lunghezza 8 sull'alfabeto $A = \{a, b, c\}$. In quante di esse entrambi i simboli a e b sono usati esattamente una volta (es. *ccacccbc*)? E in quante stringhe a e b sono usati al massimo una volta (es. *ccacccbc*, *ccaccccc*).

[Esercizio 7 - SOLO PER RECUPERO SECONDO COMPITINO]
Date due relazioni $R_1 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $R_2 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la loro *composizione* è la relazione $R_2 \circ R_1 = \{ \ (n, m) \ | \ \exists k.(n \ R_1 \ k \ \land \ k \ R_2 \ m) \ \} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Mostrare con un controesempio che la composizione di relazioni non è commutativa. A cosa corrisponde la relazione $R_{\pm 1} \circ R_{\pm 1}$?

[Esercizio 8 - SOLO PER RECUPERO SECONDO COMPITINO]
Disegnare il diagramma di Hasse della relazione di divisibilità sul dominio $\{4, 5, 6, 20, 24, 30, 600\}$