Note di LMM (Spezia) 7 Ottobre 2005

Roberto Bruni
Dipartimento di Informatica, Università di Pisa

1 Funzioni

Le funzioni bigettive definiscono una corrispondenza *biunivoca* (*uno-a-uno*) tra gli elementi del dominio e quelli del codominio. Infatti se $f: A \to B$ è bigettiva sappiamo che:

- ad ogni $a \in A$ è associato un unico elemento di B (ovvero l'elemento $f(a)$) perché f è una funzione
- ad ogni elemento $b \in B$ corrisponde un unico elemento di A (l'elemento a tale che $f(a) = b$)
  - sappiamo che esiste almeno un elemento con queste caratteristiche perché f è surgettiva
  - sappiamo che è unico perché f è iniettiva

DEFINIZIONE 1.1
Data una funzione bigettiva $f: A \to B$ la sua funzione inversa *$f^{-1}: B \to A$ associa ad ogni $b \in B$ (l'unico) elemento di A tale che $f(a) = b$, ovvero:*

$$f^{-1}(b) = a \qquad \text{se e solo se} \qquad f(a) = b$$

L'elemento a viene detto controimmagine di b.

TERMINOLOGIA 1.1 *Per questo motivo le funzioni bigettive sono dette* invertibili

NOTA 1.2 *Se una funzione non è invertibile allora non può essere bigettiva. Le funzioni non bigettive sono tutte non invertibili:*

- *se una funzione non è iniettiva, allora ci sono più elementi che corrispondono allo stesso b (manca l'unicità)*
- *se una funzione non è sugettiva, allora c'è almeno un elemento b per il quale non è possibile trovare alcun elemento a tale che $f(a) = b$ (manca l'esistenza)*

ESEMPIO 1.3
Da un esercizio precedente sappiamo che $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita come $g(x) = x + 1$ è bigettiva e quindi invertibile. Qual è g^{-1}? (come è definita?)

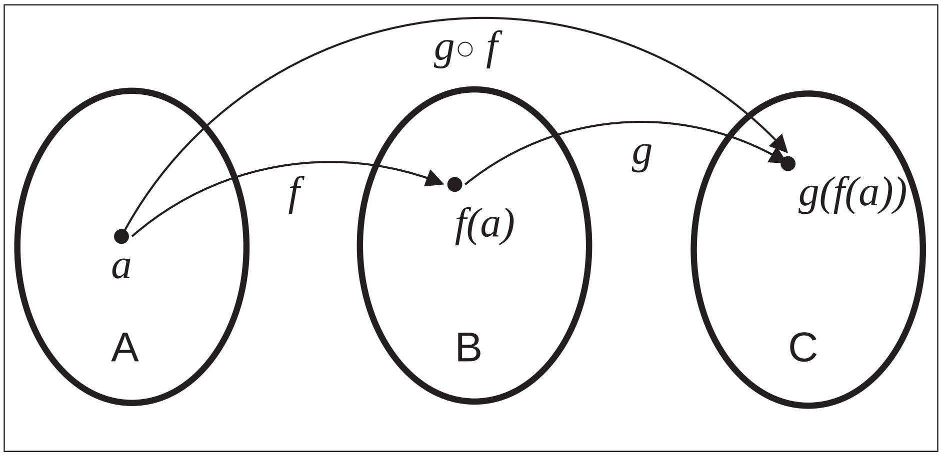

Figura 1: Composizione di funzioni.

Soluzione: $g^{-1}(y) = y - 1$

NOTA 1.4 *In generale (anche quando f non è bigettiva) la* controimmagine *è definita come un insieme:*

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Sapreste dire quali sarebbero il dominio e il codominio di f^{-1} secondo questa nozione?

Risposta: *Il dominio sarebbe B e il codominio sarebbe* $\wp(A)$.

DEFINIZIONE 1.2
Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$ due funzioni. La loro composizione *detta $g \circ f: A \to C$ è definita come*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \qquad \textit{(per ogni } a \in A\textit{)}$$

Ovvero $g \circ f$ assegna a ciascun $a \in A$ l'elemento di C che g assegna a $f(a)$ (vedi Figura 1).

ESEMPIO 1.5
Consideriamo le seguenti funzioni:
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad f(x) = x + 1$
$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad g(y) = y^2$
In questo caso possiamo comporre prima f e poi g oppure viceversa:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(n) &= g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \\ (f \circ g)(n) &= f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1\end{aligned}$$

Questo esempio mostra che <u>in generale $g \circ f \neq f \circ g$</u>, cioé che la composizione di funzioni non è commutativa! (talvolta una delle composizioni potrebbe anche non essere definita!)

ESERCIZIO 1.6
Dimostrare che la composizione di funzioni (quando definita) è associativa.

TEOREMA 1
Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ sono iniettive allora $g \circ f$ è iniettiva.

Dimostrazione: Bisogna mostrare che per ogni possibile coppia di elementi $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ si ha $(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$.

Siccome f è iniettiva, se $a_1 \neq a_2$ allora $f(a_1) \neq f(a_2)$. Chiamiamo $b_1 = f(a_1)$ e $b_2 = f(a_2)$.

Dato che anche g è iniettiva e che $b_1 \neq b_2$ si ha anche $g(b_1) \neq g(b_2)$, ovvero $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$.

Dato che $(g \circ f)(x)$ è definita proprio come $g(f(x))$ abbiamo quindi $(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$. □

TEOREMA 2
Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ sono surgettive allora $g \circ f$ è surgettiva.

Dimostrazione: <u>Fare come esercizio</u> □

COROLLARIO 3
Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ sono bigettive allora $g \circ f$ è bigettiva.

Dimostrazione: <u>Fare come esercizio</u> □

TEOREMA 4
Se $f: A \to B$ è bigettiva allora:

1. $f^{-1} \circ f = id_A$
2. $f \circ f^{-1} = id_B$
3. $(f^{-1})^{-1} = f$

(dove $\mathrm{id}_X: X \to X$ indica la funzione identità sul dominio X, definita come $\mathrm{id}_X(x) = x$ per ogni $x \in X$)

Dimostrazione: <u>Fare come esercizio</u> □

DEFINIZIONE 1.3
Si dice grafico di una funzione $f: A \to B$ *l'insieme di coppie* $\{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b = f(a)\}$ *ovvero* $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$.

2 Successioni

DEFINIZIONE 2.1
Dato un insieme A, una funzione $s\colon \mathbb{N} \to A$ *si dice* successione di elementi di A *e la si indica con la notazione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *dove* $a_n = s(n)$.

NOTA 2.1 *Dato un insieme A finito si ha che* $|A| = n$ *se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca tra A e l'insieme* $\{1,2,\dots,n\}$.

3 Altri esercizi su insiemi e funzioni per casa

ESERCIZIO 3.1
Data $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *definita come* $f(a,b) = (2a-b, 3b)$ *si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta:*

1. $f(3,4) = (2,8)$
2. $f^{-1}(2,0) = (1,0)$
3. f *è iniettiva*
4. f *è surgettiva*

ESERCIZIO 3.2
Tre categorie di utenti sono soci di un centro sportivo. Sapreste dire quanti sono complessivamente i soci se vi dico che:

- *44 giocano a Tennis (T)*
- *26 Nuotano (N)*
- *31 giocano a Golf (G)*

La risposta non è 101! Non avete abbastanza elementi per rispondere perché le tre categorie non sono necessariamente disgiunte. Fatemi aggiungere che:

- *12 si dedicano al Tennis e Nuotano*
- *5 al Tennis e al Golf*
- *6 al Nuoto e al Golf*
- *4 a tutti e tre gli sport*

Quanti sono in tutto i soci? (risolvere usando diagrammi di Eulero-Venn)

ESERCIZIO 3.3
Il diagramma di Eulero-Venn in Figura 2 può essere usato per fare dimostrazioni grafiche che coinvolgano quattro insiemi A, B, C e D? E quello in Figura 3? Motivare le risposte.

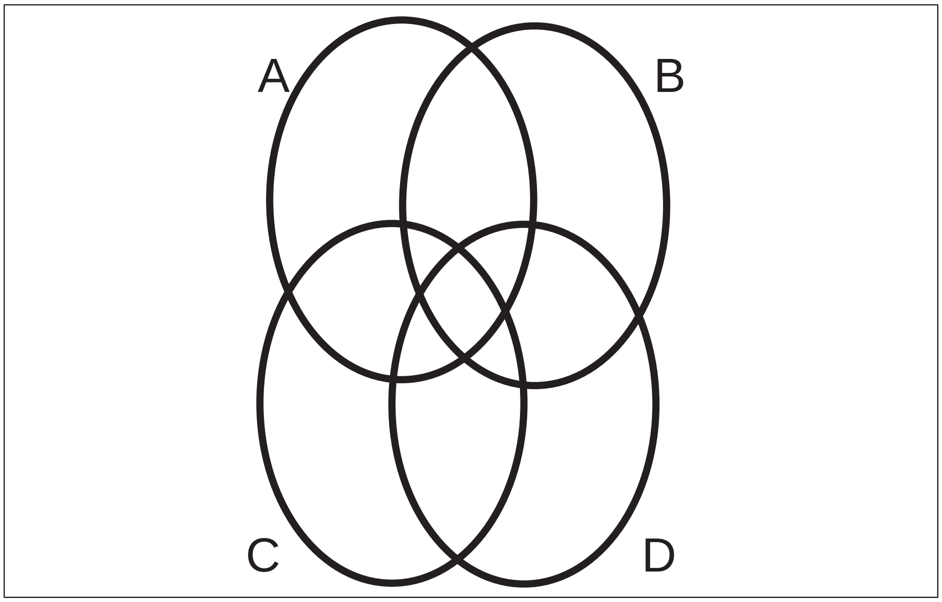

Figura 2: Diagramma Eulero-Venn con quattro insiemi.

4 Verso la Logica Proposizionale

Finora abbiamo:

- Introdotto concetti matematici di base (insiemi e funzioni)
- Mostrato come le definizioni e le proprietà debbano essere specificate in modo formale, non ambiguo, rigoroso
- Mostrato che se non vogliamo che gli enunciati dei lemmi / proposizioni / teoremi restino mere congetture dobbiamo fornire argomentazioni convincenti (inoppugnabili) dette prove o dimostrazioni che ne evidenzino la validità (oppure possiamo confutarli fornendo controesempi)
  - a volte le prove sono ovvie e intuitive (es. $A \cup B = B \cup A$)
  - a volte la gestione dei casi possibili le rende più complicate (es. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$)
- Mostrato che l'uso del linguaggio naturale introduce ambiguità:
  - es: se al bar chiediamo "un panino col prosciutto o col salame", "un succo di frutta alla pesca o all'albicocca" la nostra richiesta è soddisfatta se
    * riceviamo un solo panino col prosciutto
    * riceviamo un solo panino col salame
    * MA NON se riceviamo due panini (uno col prosciutto e l'altro col salame)

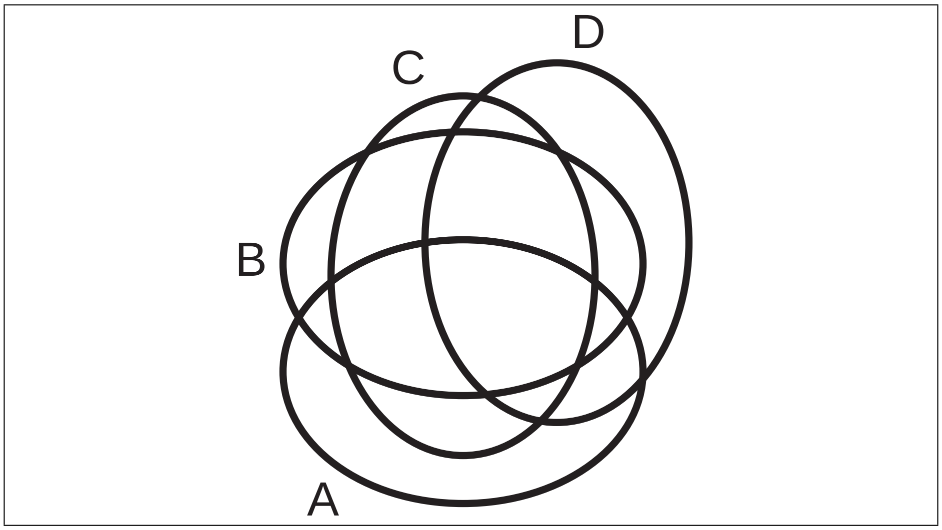

Figura 3: Diagramma Eulero-Venn con quattro insiemi.

  – es: se il bando di un concorso richiede "la laurea in informatica o la laurea in agraria" certamente è ammesso anche chi possiede entrambe le lauree

- Nel linguaggio matematico non deve mai succedere che queste ambiguità scaturiscano dalla sintassi

Per giungere a definizioni precise e rigorose considereremo solo enunciati che affermano qualcosa e per i quali si possa dire:

Principio del terzo escluso: che sono veri oppure falsi (senza altre possibilità)

Principio di non contraddittorietà: ma non entrambe le cose assieme

Questi enunciati sono detti *proposizioni*.

ESEMPIO 4.1
"Quanti sono i numeri primi minori di 100?" non è una proposizione

ESEMPIO 4.2
"Sono biondo naturale" è una proposizione... falsa nel mio caso

Spesso troveremo conveniente usare dei simboli ai quali dovremo dare una *interpretazione* sopra un ben preciso dominio prima di valutare il valore di verità di una formula (definizione della semantica)

Per costruire le prove più facilmente e per poterle riutilizzare vedremo degli schemi di ragionamento *validi per ogni interpretazione* (deduzioni), e quindi applicabili in modo simbolico alla sintassi astratta.

Tipicamente le nostre dimostrazioni saranno formate da una serie di *premesse* che ci permottono di dedurre una *conclusione*

- Premessa 1
- Premessa 2
- ...
- Premessa n

Conclusione!

Un simile schema di ragionamento è valido se quando sono vere le premesse allora siamo sicuri che la conclusione è vera: non stiamo affermando né che le premesse siano vere, né che sia vera la conclusione.

ESEMPIO 4.3
Consideriamo il seguente ragionamento:

- piove o nevica
- è troppo caldo per nevicare

piove!

Il ragionamento è valido anche se una delle premesse è falsa: Se oggi c'è il sole la prima premessa è falsa e anche la conclusione è falsa, ma il ragionamento resta valido.

ESEMPIO 4.4
Consideriamo il seguente ragionamento:

- piove o nevica o c'è il sole
- è troppo caldo per nevicare

piove!

Non è un ragionamento valido: come controesempio, se oggi c'è il sole le premesse sono vere, ma la conclusione è falsa.

ESEMPIO 4.5
Consideriamo il seguente ragionamento:

- lavoro oggi o domani
- domani non lavoro

lavoro oggi!

È un ragionamento valido. Notate qualche somiglianza col primo esempio? Se rimpiazziamo le singole affermazioni con dei simboli vediamo che lo schema di ragionamento è sempre il solito:

- P oppure Q
- non vale Q

allora vale P!

Questo schema di ragionamento è valido indipendentemente da P e Q

ESERCIZIO 4.6
Ritenete che il seguente ragionamento sia valido?

- Il colpevole è il cuoco o la cameriera
- Il colpevole è l'autista o la cameriera

Il colpevole è il cuoco o l'autista!

Motivare la risposta.

ESERCIZIO 4.7
Ritenete che il seguente ragionamento sia valido?

- O la ventola è fuori asse o il meccanismo di calibrazione è alterato
- Ho controllato l'allineamento della ventola ed è ok

Quindi il meccanismo di calibrazione è fuori fase!
Motivare la risposta.

5 Logica Proposizionale

Abbiamo detto che le *proposizioni* sono asserti che possono essere veri o falsi, ma non entrambe le cose assieme.

ESERCIZIO 5.1
Quali delle seguenti sono proposizioni?

- "$2+2=4$" *(si, vera)*
- "$3 \cdot 5 = 10$" *(si, falsa)*
- *"La capitale dell'Australia è Sydney" (si, falsa)*
- *"Che ore sono?" (no)*
- *"x+1=2" (no perché x è indefinito)*

DEFINIZIONE 5.1
I valori di verità *sono valori booleani. Possono essere indicati in vari modi:*

true	*TT*	*T*	*V*	*1*	$n \in \mathbb{N}^+$	$\top$
false	*FF*	*F*	*F*	*0*	*0*	$\perp$

Noi useremo 1 per vero e 0 per falso.

George Boole nel 1854 pubblica "The Laws of Thought" dove spiega (tra le altre cose) come costruire proposizioni complesse a partire da quelle che già abbiamo a disposizione. La costruzione avviene usando la *negazione* (operatore unario) e una serie di *connettivi logici* (operatori binari).

DEFINIZIONE 5.2
La negazione di una proposizione P è

"Non è vero che P vale"

Si scrive $\neg P$ *e si legge anche "not P", "non P"*

ESEMPIO 5.2
Sia P = "Oggi è lunedì"
Allora $\neg P$ *= "Non è vero che oggi è lunedì" = "Oggi non è lunedì".*

Per illustrare la relazione tra i valori di verità delle proposizioni semplici e quelli delle loro composizioni si usano le cosiddette *tabelle di verità* (*truth tables*)

P	$\neg P$
0	1
1	0